

Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός Ι

ΜΗΧΟΠ, Πολυτεχνείο Κρήτης

Σηφαλάκης Τάσος

Χειμερινό εξάμηνο 2024-2025

Συμπληρωματικές Σημειώσεις Πίνακα 1: [Συναρτήσεις](#)

- Διδάσκοντες:
 - Καθ. Παπαδοπούλου Ελένη
 - Ε.Δι.Π. Σηφαλάκης Τάσος
 - Φροντιστηρια/ασκήσεις: Κοκκινάκης Γιώργος
- Κύριο Σύγγραμμα



14η έκδοση
Hass, Heil, Weir
**THOMAS ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ
ΛΟΓΙΣΜΟΣ**

μετάφραση της 14ης
αμερικανικής έκδοσης
Μετάφραση: Κωτσόπουλος
Γιάννης

- Πότε ? ... Υπάρχει και στην βιβλιοθήκη!
- eclass - > δυο πρώτα κεφάλαια της 12ης έκδοσης
- Άλλα βιβλία, σημειώσεις, διαλέξεις, ? Βιβλίο της 3ης λυκείου?

Πληροφορίες Για Το Μάθημα (συν.)

- Email: asifalakis@tuc.gr
- Γραφείο: Κτήριο Επιστημών, β' όροφος, 145.B.099 (<http://www.tuc.gr/maps-buildings.html?bid=2>)
- Ώρες Γραφείου: <https://outlook.office365.com/owa/calendar/Bookings1@tuc.gr/bookings/>
- eclass (Ανακοινώσεις, βοηθητικές σημειώσεις πίνακα, ...)
"Διαφορικός & Ολοκληρωτικός Λογισμός Ι, ΜΗΧ.Ο.Π., ακ. έτος 2024-2025"
<https://www.eclass.tuc.gr/courses/MHXOP249/>
- moodle (quiz, ...)
"Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός Ι"
<https://moodle.tuc.gr/course/view.php?id=212>
- 13 εβδομάδες μαθήματα (<https://www.tuc.gr/el/spoydes/akadimaiko-imerologio>)
- Επιτρέπονται τα λάθη! (N εσείς/ $\frac{N}{2}$ εγώ/ανά διάλεξη). Καλοδεχούμενες οι επισημάνσεις/ διορθώσεις/συμπληρώσεις/συζητήσεις.

Η ύλη του μαθήματος, σύμφωνα με τον οδηγό σπουδών

(<https://www.mred.tuc.gr/el/spoydes/proptychiakes-spoydes/odigoi-spoydon>).

Συναρτήσεις μιας μεταβλητής - Εκθετικές, Τριγωνομετρικές, Υπερβολικές συναρτήσεις - Αντίστροφες συναρτήσεις - Όρια και συνέχεια συναρτήσεων - Παράγωγος συνάρτησης - Γεωμετρική ερμηνεία της έννοιας της παραγώγου - Βασικοί κανόνες παραγώγισης - Κανόνας αλυσιδωτής παραγώγισης - Παραγώγιση πεπλεγμένης συνάρτησης - Διαφορικά συναρτήσεων - Μελέτη συναρτήσεων: Μονοτονία, κυρτότητα, ακρότατα συναρτήσεων - Αόριστα Ολοκληρώματα - Κανόνες Ολοκλήρωσης - Ολοκλήρωση με αντικατάσταση - Αθροίσματα Riemann - Ορισμένα Ολοκληρώματα - Θεώρημα μέσης τιμής - Θεμελιώδη Θεώρηματα - Ορισμένη ολοκλήρωση με αντικατάσταση - Εύρεση εμβαδών - Υπολογισμός όγκων και μηκών - Υπερβατικές συναρτήσεις - Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης - Τεχνικές ολοκλήρωσης: Κύριοι τύποι ολοκλήρωσης, Ολοκλήρωση κατά μέρη (παράγοντες), Μερικά κλάσματα (Ρητές συναρτήσεις), Τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις, Δυνάμεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων - Ο κανόνας του L'Hôpital - Καταχρηστικά (γενικευμένα) ολοκληρώματα - Σύγκλιση ολοκληρωμάτων - Εισαγωγή σε Ακολουθίες και Σειρές.

Η παρακολούθηση δεν είναι υποχρεωτική, αλλά συνίσταται. Σημειώσεις καλό θα είναι να κρατάτε (ή να βρίσκετε αν κάποια φορά απουσιάζετε). Οι διαφάνειες που διαβάζετε αυτή τη στιγμή είναι οι "εκφωνήσεις". Εξηγήσεις, παραδείγματα, "απαντήσεις", κτλ. θα γράφονται στο πίνακα και δεν περιέχονται στις διαφάνειες!

Θέματα Σεπτεμβρίου 2024

Θέμα 1ο: [15Μ]

Βρείτε την κλίση της καμπύλης

$$y^2 + x^2 = y^4 - 2x$$

στο σημείο $P(-2, 1)$.

Θέμα 2ο: [15Μ] Απαντήστε Σωστό ή Λάθος στις παρακάτω προτάσεις με σύντομη αιτιολόγηση.

(α) Η συνάρτηση $y = 1$ είναι περιττή.

(β) Αν το $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -a} f(x)$ υπάρχει, τότε $\lim_{x \rightarrow -a} f(x) = -\infty$.

(γ) Αν μια συνάρτηση δεν ορίζεται στο x_0 τότε δεν έχει όριο στο x_0 .

(δ) Η παράγωγος της $\sin^{-1} x$ ισούται με $-\frac{\cot x}{\sin x}$ (για τα x για τα οποία ορίζεται η σχέση).

(ε) Αν $\int_{-10}^{10} f(x) dx = 0$, $f_D = [-10, 10]$ και η f δεν είναι παντού μηδέν, τότε η $f(x)$ είναι σίγουρα περιττή.

Θέμα 3ο: [20Μ] Ένα χωράφι έκτασης 216 τετραγωνικών μέτρων και σχήματος ορθογωνίου, πρόκειται να περιφραχθεί και κατόπιν να μοιραστεί στα δυο, πάλι με φράχτη, παράλληλο σε δυο απέναντι πλευρές του. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του εξωτερικού ορθογωνίου για να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό μήκος της περίφραξης (εξωτερικής και εσωτερικής);

Θέμα 4ο: [20Μ] Επιλύστε την παρακάτω διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = (1 + y)e^x, y > -1$$

Θέμα 5ο: [10Μ]

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^2 \frac{x^2}{(x^3 + 2)^3} dx$$

Θέμα 6ο: [10Μ]

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int e^{2x} \sin x dx$$

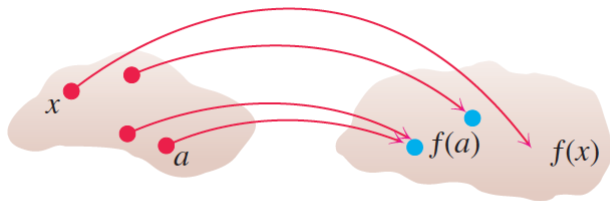
Θέμα 7ο: [10Μ] Υπολογίστε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

[c1] Συνάρτηση

Ορισμός (Συνάρτηση)

Συνάρτηση f από ένα σύνολο D σε ένα σύνολο Y είναι ένας κανόνας που αντιστοιχίζει μια μοναδική τιμή $f(x)$ του Y σε κάθε στοιχείο x του D .



$D =$ πεδίο ορισμού

$Y =$ σύνολο που περιέχει
το πεδίο τιμών

- Το σύνολο όλων των δυνατών τιμών εισόδου ονομάζεται Πεδίο ορισμού [Domain] της συνάρτησης f . Συμβολίζεται με D ή $D(f)$ ή f_D .
- Το σύνολο όλων των δυνατών τιμών εξόδου της $f(x)$, καθώς το x παίρνει τιμές από το D ονομάζεται Πεδίο τιμών [Range] της συνάρτησης.
- Μια συνάρτηση μπορεί να οριστεί μέσω μιας εξίσωσης, ενός τύπου, μιας σχέσης, ...

Άσκηση

Βρείτε τις τιμές της κάθε συνάρτησης και το πεδίο ορισμού της.

$$f(x) = x^2 - 1$$

- $f(1)$
- $f(a^2 + 1)$
- D

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6}$$

- $g(2)$
- g_D

$$h(t) = \sqrt{4 - t}$$

- $h(2)$
- $h(5)$
- $D(h)$

$$w(h) = \frac{\sqrt{4 - h}}{h^2 - 5h + 6}$$

- $w(4)$
- D

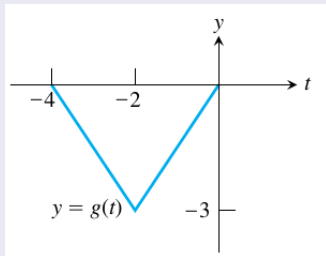
[c3] Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

Μια συνάρτηση μπορεί να περιγραφεί και μέσω της γραφικής της παράστασης. Π.χ. στο παρακάτω σχήμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης g είναι η μπλέ γραμμή, η οποία "αρχίζει" από το $t = -4$ και "τελειώνει" στο $t = 0$.

Άσκηση

Γράψτε τις τιμές της συνάρτησης στα ζητούμενα σημεία, το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών

- $g(-4)$
- $g(-2)$
- $g(2)$
- D
- Πεδίο Τιμών (Π.Τ.)



Άσκηση

Δώστε δυο παραδείγματα καμπυλών του επιπέδου οι οποίες δεν είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων.

Homework

[Thomas 14th ed. §1.1, ασκ. 24] Παραστήστε γραφικά τις παρακάτω εξισώσεις και εξηγήστε γιατί δεν αποτελούν γραφήματα συναρτήσεων του x .

$$(a) |x| + |y| = 1$$

$$(b) |x + y| = 1$$

Άσκηση

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι τιμές του Bitcoin σε δολάρια μέχρι και το πρώτο τρίμηνο του 2024. Π.χ. στο τέλος του 2017 χρειαζόσουν 20000 δολάρια για να αγοράσεις 1 bitcoin ενώ στο τέλος του 2018 χρειαζόσουν 5000.



Αν είχαμε διαθέσει το ποσό των 1000 ευρώ για αγορά bitcoin στο τέλος του 2017 και είχαμε πουλήσει ένα χρόνο αργότερα, θα είχαμε κέρδος ή ζημιά; Πόσο περίπου; (Υποθέστε ότι 1 ευρώ \approx 1 δολάριο).

Άσκηση

Βρείτε τις εξισώσεις των παρακάτω ευθειών:

- Κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το σημείο (a, b)
- Οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το σημείο (a, b)

Άσκηση

- Η μη-κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) έχει εξίσωση

$$y = m(x - x_1) + y_1,$$

όπου m η κλίση της ευθείας. $m = \underline{\hspace{2cm}}$

- Δυο μη-κατακόρυφες ευθείες είναι παράλληλες αν έχουν $\underline{\hspace{2cm}}$ κλίση, ενώ είναι κάθετες αν οι κλίσεις τους m_1, m_2 ικανοποιούν την σχέση $\underline{\hspace{2cm}}$

Θεώρημα (Εξίσωση Ευθείας)

Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής

$$Ax + By + C = 0, \text{ με } A \neq 0 \text{ ή } B \neq 0$$

*και αντιστρόφως, κάθε εξίσωση αυτής της μορφής
παριστάνει ευθεία γραμμή.*

⓪ Μπορούν όλες οι ευθείες του επιπέδου, να περιγραφούν από κάποια συνάρτηση $y = f(x)$;

Homework

[Thomas 12th ed. §0.1, ασκ. 18] Γράψτε μια εξίσωση για την ευθεία που διέρχεται από το P και είναι (i) παράλληλη στην L και (ii) κάθετη στην L

$$(α) P(-2, 4), \quad L : x = 5$$

$$(β) P(-1, 1/2), \quad L : y = 3$$

Homework

[Thomas 12th ed. §0.1, ασκ. 25] Για ποιά τιμή του k είναι οι ευθείες

$$2x + ky = 3$$

και

$$x + y = 1$$

(α) Παράλληλες

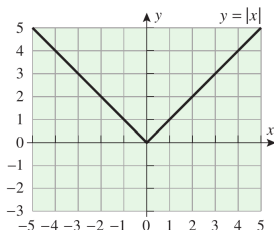
(β) Κάθετες

Ορισμός (Τμηματικά Οριζόμενες Συναρτήσεις)

Μια συνάρτηση μπορεί να έχει διαφορετικούς ορισμούς σε διάφορα μέρη του πεδίου ορισμού της. Μια τέτοια συνάρτηση ονομάζεται και τμηματικά οριζόμενη (piecewise) ή κλαδική (δίκλαδη, τρίκλαδη, ...).

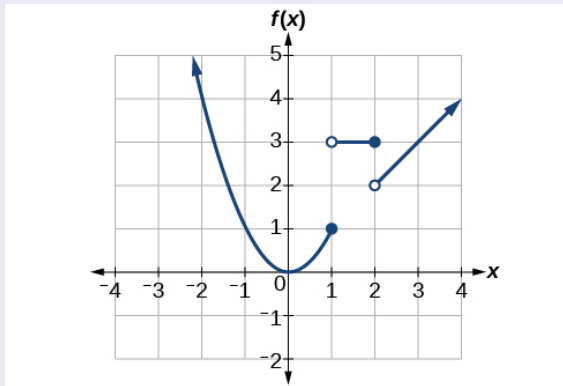
Η συνάρτηση απόλυτης τιμής $f(x) = |x|$ είναι ένα παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης υπό την έννοια ότι ο τύπος για την f αλλάζει ανάλογα με την τιμή του x .

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$



Άσκηση

Γράψτε τον τύπο της εικονιζόμενης συνάρτησης (θεωρήστε ότι το πρώτο μέρος είναι παραβολή της μορφής $y = ax^2 + b$)



Άσκηση

Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Homework

[Thomas 12th ed. §0.2, ασκ. 23] Για την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x < 1 \\ \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}, & 1 \leq x \leq 3 \\ x + 3, & x > 3 \end{cases}$$

- (α) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση
- (β) Βρείτε το πεδίο ορισμού
- (γ) Βρείτε το πεδίο τιμών

Ορισμός (Αύξουσες και Φθίνουσες Συναρτήσεις)

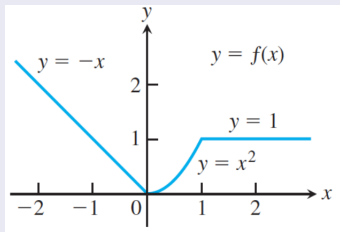
Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα I και x_1, x_2 δυο διαφορετικά σημεία στο I

- Αν $f(x_1) < f(x_2)$ οποτεδήποτε $x_1 < x_2$, τότε η f ονομάζεται αύξουσα στο I .
- Αν $f(x_2) < f(x_1)$ οποτεδήποτε $x_1 < x_2$, τότε η f ονομάζεται φθίνουσα στο I .

[Παρατηρήστε την αναντιστοιχία αυτών των ορισμών με τους αντίστοιχους ορισμούς του σχολικού βιβλίου.]

Άσκηση

Έστω συνάρτηση f που εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.

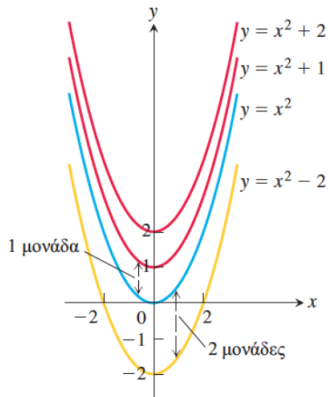


Τι είναι η συνάρτηση (αύξουσα, φθίνουσα, ούτε αύξουσα ούτε φθίνουσα) στα παρακάτω διαστήματα

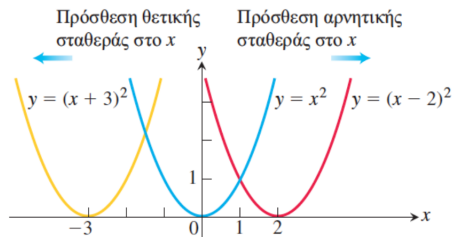
- 1 Στο $[-2, 0]$
- 2 Στο $[0, 1]$
- 3 Στο $[1, 2]$
- 4 Σε όλο το πεδίο ορισμού της.

[c9] Μετατοπίσεις

$$y = f(x) + k \text{ (κατακόρυφη)}$$



$$y = f(x + h) \text{ (οριζόντια)}$$



Άσκηση

Ξεκινώντας από το γράφημα της

$$y = |x|$$

κατασκευάστε με μετατοπίσεις το γράφημα της

$$y = |x - 2| - 1$$

Ορισμός (Συμμετρίες)

- Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow R$ καλείται **άρτια** αν το πεδίο ορισμού της A περιλαμβάνει το $-x$ όποτε περιλαμβάνει το x και επιπλέον

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in A.$$

- Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow R$ καλείται **περιττή** αν το πεδίο ορισμού της A περιλαμβάνει το $-x$ όποτε περιλαμβάνει το x και επιπλέον

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in A$$

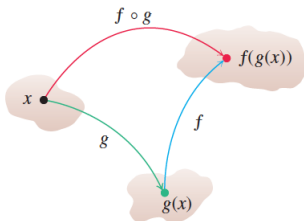
- Ⓚ Τι συμμετρία υπάρχει στις γραφικές παραστάσεις των άρτιων και περιττών συναρτήσεων;
- Ⓚ Υπάρχουν συναρτήσεις των οποίων οι γραφικές παραστάσεις είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα x ;

Ορισμός (Σύνθεση Συναρτήσεων)

Αν f και g συναρτήσεις τότε η σύνθετη συνάρτηση $f \circ g$ (f σύνθεση g) ορίζεται μέσω της

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ αποτελείται από τους αριθμούς x του πεδίου ορισμού της g για τους οποίους το $g(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .



Άσκηση

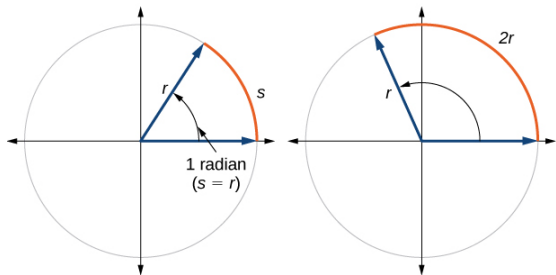
Έστω $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = x + 1$.

Βρείτε τις παρακάτω σύνθετες συναρτήσεις και τα πεδία ορισμού τους

- 1 $(f \circ g)(x)$
- 2 $(g \circ f)(x)$
- 3 $(f \circ f)(x)$
- 4 $(g \circ g)(x)$

[c13] Γωνίες

Στο διαφορικό λογισμό βολεύει να υπολογίζουμε τις γωνίες σε ακτίνια (radians, rads). Στο εξής υποθέτουμε ότι όλες οι γωνίες μετρώνται σε ακτίνια εκτός αν δηλωθεί σαφώς ότι μετρώνται σε μοίρες ($^{\circ}$) ή κάποια άλλη μονάδα μέτρησης.



$$2\pi \text{ ακτίνια} = 360^{\circ}$$

$$\pi \text{ ακτίνια} = 180^{\circ}$$

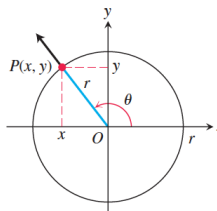
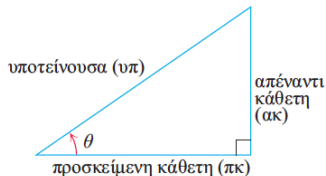
$$\frac{\pi}{2} \text{ ακτίνια} = 90^{\circ}$$

- ① Μια γωνία μπορεί να είναι αρνητική;
- ② Μια γωνία μπορεί να είναι μεγαλύτερη από $2\pi \text{ rad}$;

Άσκηση

- 1 Πόσα ακτίνια είναι οι 135 μοίρες;
- 2 Πόσες μοίρες είναι τα $\frac{5\pi}{6}$ ακτίνια;

[c16] Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις



Ημίτονο

$$\sin \theta = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

Συνημίτονο

$$\cos \theta = \frac{\text{προσκεείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

Εφαπτομένη

$$\tan \theta = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκεείμενη κάθετη}}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

[c16] Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις (συν.)

Επίσης υπάρχουν και οι *ανάποδες* τους:

Συντέμνουσα

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

Τέμνουσα

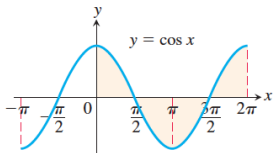
$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

Συνεφαπτομένη

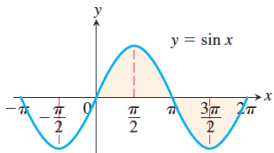
$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

Ορισμός (Περιοδικές Συναρτήσεις)

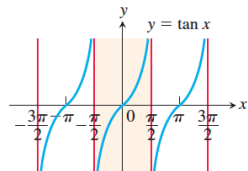
Μια συνάρτηση f είναι περιοδική εάν υπάρχει θετικός αριθμός p τέτοιος ώστε $f(x + p) = f(x)$ για κάθε x . Η μικρότερη δυνατή τιμή του p είναι η περίοδος της f .



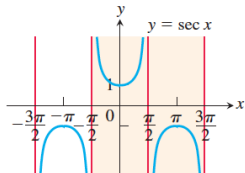
Πεδίο ορισμού: $-\infty < x < \infty$
 Πεδίο τιμών: $-1 \leq y \leq 1$
 Περίοδος: 2π
 (α)



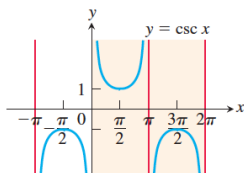
Πεδίο ορισμού: $-\infty < x < \infty$
 Πεδίο τιμών: $-1 \leq y \leq 1$
 Περίοδος: 2π
 (β)



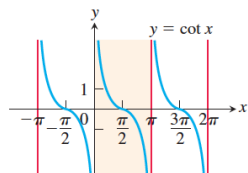
Πεδίο ορισμού: $x \neq \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$
 Πεδίο τιμών: $-\infty < y < \infty$
 Περίοδος: π (γ)



Πεδίο ορισμού: $x \neq \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$
 Πεδίο τιμών: $y \leq -1$ ή $y \geq 1$
 Περίοδος: 2π
 (δ)



Πεδίο ορισμού: $x \neq 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$
 Πεδίο τιμών: $y \leq -1$ ή $y \geq 1$
 Περίοδος: 2π
 (ε)



Πεδίο ορισμού: $x \neq 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$
 Πεδίο τιμών: $-\infty < y < \infty$
 Περίοδος: π
 (στ)

Άσκηση

Αποδείξτε την βασική τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

για οξεία γωνία, με τη βοήθεια του πυθαγόρειου θεωρήματος, σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο.

Κατόπιν αποδείξτε και την

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

Άσκηση

Χρησιμοποιώντας ένα ορθογώνιο τρίγωνο υπολογίστε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς

1 $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

2 $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

3 $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

[👉 Το μήκος της υποτεινουσας να είναι 1.]

Άσκηση

Θυμηθείτε (και απομνημονεύστε) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των παρακάτω βασικών γωνιών.

(rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
(°)	(0°)	(30°)	(45°)	(60°)	(90°)
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

Άσκηση

Θυμηθείτε (και απομνημονεύστε) τους τύπους αθροίσματος γωνιών, διπλάσιας και ημίσειας γωνίας.

$$① \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$② \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$③ \sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$④ \cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$⑤ \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$⑥ \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

- 1 Αλγεβρικές
 - 1 Γραμμικές
 - 2 Δυνάμεων
 - 3 Πολυωνυμικές
 - 4 Ρητές
- 2 Υπερβατικές
 - 1 Τριγωνομετρικές
 - 2 Εκθετικές
 - 3 Λογαριθμικές
 - 4 Υπερβολικές
 - 5 ...

Πρέπει να είμαστε σε θέση να σχεδιάζουμε γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων στον υπολογιστή ή/και στο κινητό. Υπάρχουν διαθέσιμες ιστοσελίδες και εφαρμογές (δωρεάν) για αυτή τη δουλειά. Ανακαλύψτε και μάθετε να χρησιμοποιείτε κάποια από αυτές!

Άσκηση

- 1 *Μερικές συναρτήσεις είναι πολύ συχνά χρησιμοποιούμενες και πρέπει να ξέρουμε τις γραφικές τους παραστάσεις (τις ξέρουμε από το λύκειο ...)*

Homework

[Thomas 12th ed. §0.3, ασκ. 7] Έστω η συνάρτηση

$$y = -2^x + 3$$

- (α) Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση
- (β) Βρείτε το πεδίο ορισμού της
- (γ) Βρείτε το πεδίο τιμών της
- (δ) Υπολογίστε τα σημεία τομής της Γ.Π. με τους άξονες

Homework

[Thomas 12th ed. §0.4, ασκ. 35] *Επιλύστε την εξίσωση*

$$e^x + e^{-x} = 3$$