Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός 1

ΜΗΧΟΠ, Πολυτεχνείο Κρήτης

Σηφαλάκης Τάσος

Χειμερινό εξάμηνο 2024-2025

Συμπληρωματικές Σημειώσεις Πίνακα 2: Όρια

Προσοχή!

Η παρακολούθηση δεν είναι υποχρεωτική, αλλά συνίστανται. Σημειώσεις καλό θα είναι να κρατάτε (ή να βρίσκετε αν κάποια φορά απουσιάζετε). Οι διαφάνειες που διαβάζετε αυτή τη στιγμή είναι οι "εκφωνήσεις". Εξηγήσεις, παραδείγματα, "απαντήσεις", κτλ. θα γράφονται στο πίνακα και δεν περιέχονται στις διαφάνειες!

Ορισμός (Όριο)

Έστω ότι η $f(x)$ ορίζεται σε κάθε σημείο ανοιχτού διαστήματος που περιέχει το c εκτός ενδεχομένως στο ίδιο το c. Λέμε ότι το όριο της $f(x)$ καθώς το x τείνει στο c είναι ο αριθμός L, και γράφουμε

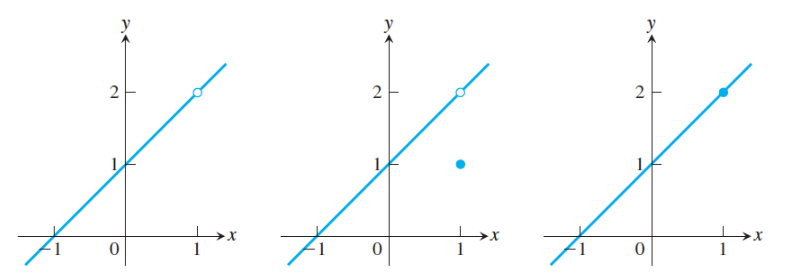
$$\lim_{x \to c} f(x) = L,$$

αν, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει αντίστοιχο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x,

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \textit{οποτεδήποτε} \quad 0 < |x - c| < \delta.$$

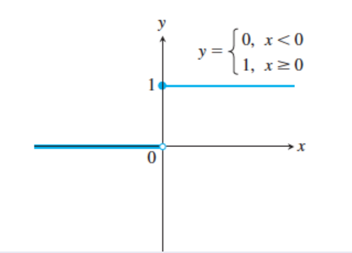
Άσκηση

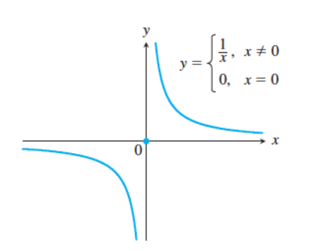
Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων καθώς το $x \to 1$

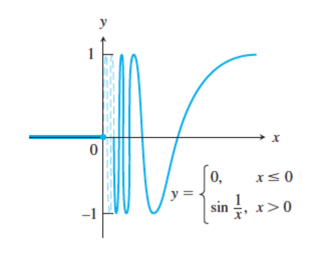


Άσκηση

Έχουν οι παρακάτω συναρτήσεις όριο στο μηδέν;







Ορισμός (Δεξί Πλευρικό Όριο)

Έστω ότι το πεδίο ορισμού της f περιέχει ένα διάστημα (c, d) στα δεξιά του c. Λέμε ότι η $f(x)$ έχει δεξιό όριο L στο c και γράφουμε

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L,$$

αν για κάθε αριθμό $\epsilon > 0$ υπάρχει αντίστοιχος αριθμός $\delta > 0$ τέτοιος ώστε

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \textit{οποτεδήποτε} \quad c < x < c + \delta.$$

[c22] (συν.)

Ορισμός (Αριστερό Πλευρικό Όριο)

Έστω ότι το πεδίο ορισμού της f *περιέχει ένα διάστημα* (b, c) *στα αριστερά του* c. *Λέμε ότι η* $f(x)$ *έχει αριστερο όριο* L *στο* c *και γράφουμε*

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L,$$

αν για κάθε αριθμό $\epsilon > 0$ *υπάρχει αντίστοιχος αριθμός* $\delta > 0$ *τέτοιος ώστε*

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \textit{οποτεδήποτε} \quad c - \delta < x < c.$$

Ορισμός (Σχέση Ορίου Με Πλευρικά Όρια)

- *Αν μια συνάρτηση f ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής $(a, x) \cup (x, b)$, τότε*

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

- *Αν μια συνάρτηση f ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής (x, b) αλλά όχι σε διάστημα της μορφής (a, x) τότε*

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

- *Αν μια συνάρτηση f ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής (a, x) αλλά όχι σε διάστημα της μορφής (x, b) τότε*

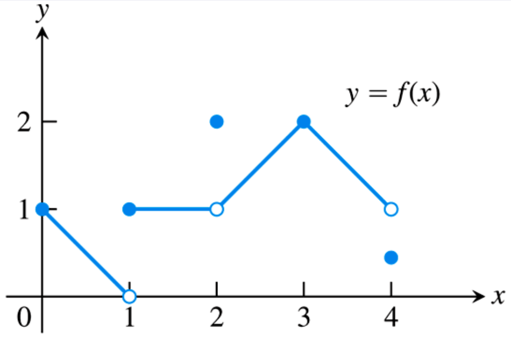
$$\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

[c24-30] Ερωτήσεις

- Αν μια συνάρτηση δεν ορίζεται σε ένα σημείο, τότε δεν έχει όριο εκεί;
- Το όριο εξαρτάται από τη τιμή της συνάρτησης στο c;
- Το όριο υπάρχει για κάθε σημείο που ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης;
- Υπάρχουν συναρτήσεις που έχουν διαφορετικά πλευρικά όρια σε ένα σημείο;
- Αν μια συνάρτηση έχει σε ένα σημείο και τα δυο πλευρικά όρια τότε σημαίνει ότι έχει όριο στο σημείο αυτό;
- Αν το όριο μιας συνάρτησης σε ένα σημείο υπάρχει και η συνάρτηση ορίζεται σε αυτό το σημείο, τότε το όριο ισούται με την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό;
- Μια συνάρτηση μπορεί να έχει δυο διαφορετικά όρια σε ένα σημείο;

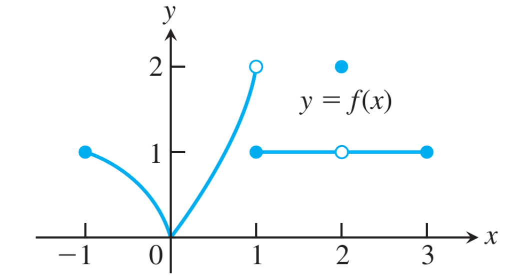
Άσκηση

Για τη συνάρτηση $f(x)$ που απεικονίζεται στο σχήμα, βρείτε όλα τα όρια (και τα πλευρικά) στα σημεία $x = 0, 1, 2, 3, 4$



Σωστό-Λάθος

Άσκηση



(α) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$

(β) $\nexists$ το $\lim_{x\to 2} f(x)$

(γ) $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$

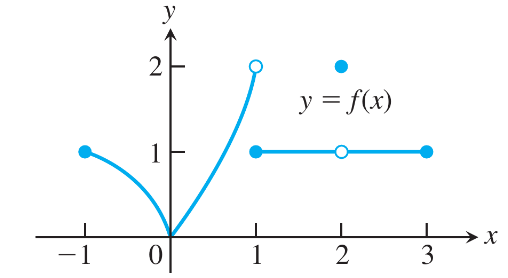
(δ) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$

(ε) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$

(στ) $\nexists$ το $\lim_{x\to 1} f(x)$

(ζ) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

Άσκηση



(η) *Υπάρχει το* $\lim_{x \to c} f(x)$ *σε κάθε* c *στο* $(-1, 1)$

(θ) *Υπάρχει το* $\lim_{x \to c} f(x)$ *σε κάθε* c *στο* $(1, 3)$

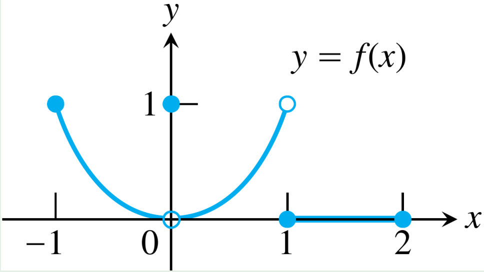
(ι) $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 0$

(ια) *Δεν υπάρχει* $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

[α11]

Homework

[Thomas 12th ed. §1.2, ασκ. 21] *Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις, σχετικά με τη συνάρτηση $y = f(x)$ που έχει σχεδιαστεί παρακάτω, είναι αληθείς και ποιες όχι.*



Homework

(α) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$

(β) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

(γ) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$

(δ) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

(ε) *Το* $\lim_{x\to 0} f(x)$ *δεν υπάρχει.*

(στ) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

(ζ) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

(η) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

(θ) $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

(ι) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$

(ια) *Το* $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ *δεν υπάρχει.*

(ιβ) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$

[32] Ιδιότητες Ορίων

Υποθέτουμε ότι τα όρια $\lim_{x\to c} f(x)$ και $\lim_{x\to c} g(x)$ υπάρχουν, το $\lambda \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}^*$. Τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες

1.	$\lim_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$
2.	$\lim_{x\to c}[\lambda f(x)] = \lambda \lim_{x\to c} f(x)$
3.	$\lim_{x\to c}[f(x)\, g(x)] = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]\left[\lim_{x\to c} g(x)\right]$
4.	$\lim_{x\to c}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, αν $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$
5.	$\lim_{x\to c}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$
6.	$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$, για $f(x) \geq 0$ για x κοντά στο c αν n άρτιος

Άσκηση

Υπολογίστε τα όρια [απλή αντικατάσταση]

1. $\lim_{x \to 1} \dfrac{5x^3 + 4}{x - 3}$
2. $\lim_{x \to 0} \sqrt{7 + \sec^2 x}$
3. $\lim_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 4x}{5x^3 - 36}$

Άσκηση

Πως αντιμετωπίζουμε όρια με "μηδενιζόμενους παρονομαστές";

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$
2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

[α08]

Homework

[Thomas 12th ed. §1.2, ασκ. 13] *Υπολογίστε τα όρια*

1. $\lim_{t \to -5} \dfrac{t^2 + 3t - 10}{t + 5}$
2. $\lim_{x \to -2} \dfrac{-2x - 4}{x^3 + 2x^2}$
3. $\lim_{y \to 1} \dfrac{y - 1}{\sqrt{y + 3} - 2}$

[α09]

Homework

[Thomas 12th ed. §1.2, ασκ. 32] *Υπολογίστε τα όρια*

1. $$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$$
2. $$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$$

Homework

[Thomas 12th ed. §1.2, ασκ. 29] *Υπολογίστε το όριο*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}$$

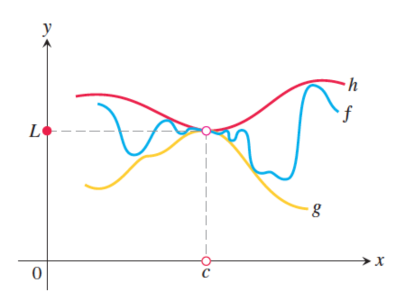
Θεώρημα (Παρεμβολής / σάντουιτς)

Έστω ότι

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

για κάθε x που ανήκει σε ανοιχτό διάστημα που περιέχει το c εκτός, ενδεχομένως, για το ίδιο το c. Αν επιπλέον ισχύει ότι

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L, \quad \textit{τότε} \quad \lim_{x\to c} f(x) = L$$



Άσκηση

Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \to 0} x^2 \cos\frac{1}{x}$$

[α10]

Homework

[Thomas 12th ed. §1.2, ασκ. 15] *Η ανισότητα*

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{x \sin x}{2 - 2\cos x} < 1$$

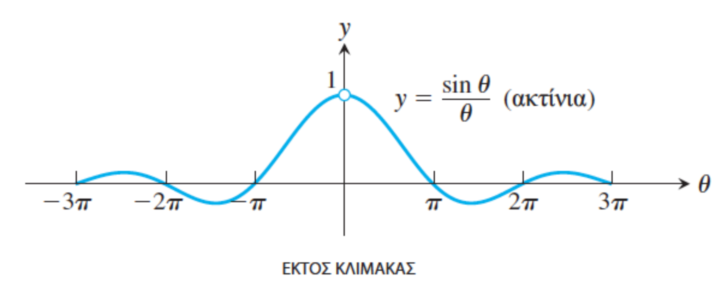
ισχύει $\forall x$ *κοντά στο μηδέν. Τι συμπεραίνουμε για την τιμή του ορίου*

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{2 - 2\cos x};$$

Θεώρημα (Όριο Του Πηλίκου $\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ Καθώς $\theta \to 0$)

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

** Το θ είναι σε ακτίνια*



Άσκηση

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$ *υπολογίστε τα όρια*

1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(4x)}{7x}$
2. $\lim_{t \to 0} \dfrac{\tan(t)\sec(2t)}{3t}$

Άσκηση

Υπολογίστε τα όρια $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ *και* $\lim_{x\to 1} f(x)$ *για την*

$$f(x) = \begin{cases} -2x+4, & x \leq 1 \\ \\ \sqrt{x-1}, & x > 1 \end{cases}$$

Homework

[Thomas 12th ed. §1.2, ασκ. 35] *Δεδομένου ότι*

$$\lim_{x \to -2} \frac{f(x)}{x^2} = 1,$$

βρείτε τα

1. $\lim_{x \to -2} f(x)$
2. $\lim_{x \to -2} \frac{f(x)}{x}$

Ορισμός (Συνέχεια Σε Σημείο)

Έστω $c \in \mathbb{R}$ που είναι είτε εσωτερικό σημείο είτε άκρο ενός διαστήματος στο πεδίο ορισμού της f

- *Η f είναι συνεχής στο c αν*

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

- *Η f είναι συνεχής από αριστερά στο c αν*

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$$

- *Η f είναι συνεχής από δεξιά στο c αν*

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$$

Κριτήριο (Συνέχειας)

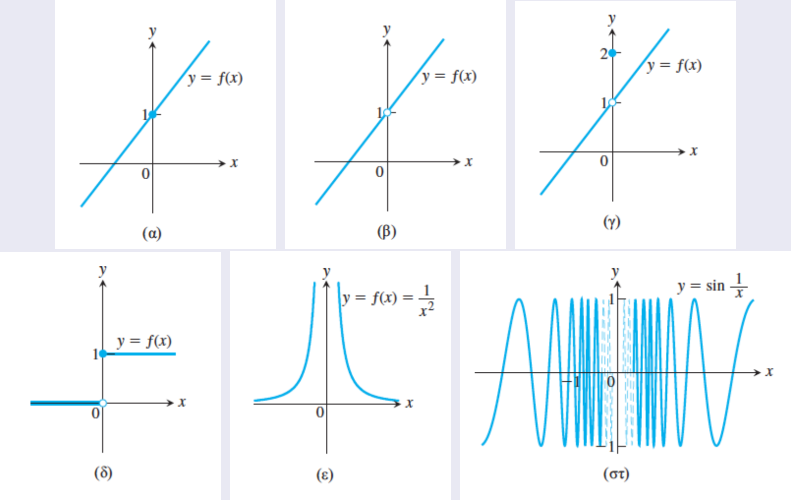
Μια συνάρτηση $f(x)$ *είναι συνεχής σε ένα σημείο* $x = c$ *αν και μόνο αν πληροί τους ακόλουθους τρεις όρους:*

1. *Υπάρχει το* $f(c)$
2. *Υπάρχει το όριο* $\lim_{x \to c} f(x)$
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Όταν μιλάμε για πλευρική συνέχεια, τα όρια στις προτάσεις 2 και 3 θα πρέπει να αντικατασταθούν με τα αντίστοιχα πλευρικά όρια.

Άσκηση

Είναι οι παρακάτω συναρτήσεις συνεχείς στο μηδέν;



Ορισμός (Συνεχής Συνάρτηση)

Συνεχή συνάρτηση ονομάζουμε μια συνάρτηση που είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Άσκηση

Η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

είναι συνεχής συνάρτηση;

? Πως μοιάζει η γραφική παράσταση μιας συνεχής συνάρτησης;

? Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν είναι συνεχείς σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού τους;

"Η $f(x)$ θα παραμένει συνεχής ως προς x, αν μια απειροελάχιστη αύξηση της μεταβλητής παράγει πάντοτε μια απειροελάχιστη αύξηση της ίδιας της συνάρτησης." (Cauchy)

Θεώρημα (Bolzano)

Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και

$$f(a)\,f(b) < 0$$

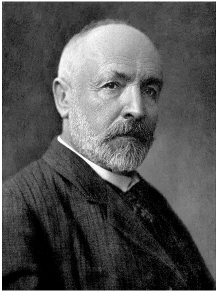
τότε η συνάρτηση f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (a, b).

Σχήμα: Bernard Bolzano, 1781-1848

Άσκηση

Δείξτε ότι η $\cos x = x$ έχει ρίζα.

[c46] Άπειρο



Σχήμα: George Cantor, 1845-1918

Σχήμα: David Hilbert, 1862-1943

- ? Αναρωτηθήκατε ποτέ τι είναι το άπειρο;
- ? Υπάρχει άραγε ένα μόνο άπειρο;
- ? Έχετε πάει στο ξενοδοχείο του Hilbert;

`https://www.youtube.com/watch?v=0xGsU8oIWjY`

Ορισμός

Λέμε ότι η $f(x)$ *έχει όριο* $L \in \mathbb{R}$ *καθώς το* x *τείνει στο άπειρο και γράφουμε* $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ *αν* $\forall \epsilon > 0$, *υπάρχει αντίστοιχος αριθμός* $M = M(\epsilon)$ *τέτοιος ώστε* $\forall x \in D(f)$:

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{οποτεδήποτε} \quad x > M.$$

Ορισμός

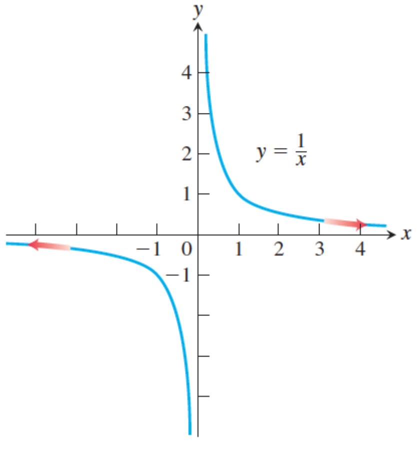
Λέμε ότι η $f(x)$ *έχει όριο* $L \in \mathbb{R}$ *καθώς το* x *τείνει στο μείον άπειρο και γράφουμε* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ *αν* $\forall \epsilon > 0$, *υπάρχει αντίστοιχος αριθμός* $N = N(\epsilon)$ *τέτοιος ώστε* $\forall x \in D(f)$:

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{οποτεδήποτε} \quad x < N.$$

? [c51] Οι ιδιότητες που αναφέρθηκαν παραπάνω (άθροισμα, διαφορά, ...) που ισχύουν για $x \to c \in \mathbb{R}$ συνεχίζουν να ισχύουν και για $x \to \pm\infty$;

Άσκηση

Βρείτε τα όρια $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ *και* $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$.



Άσκηση

Υπολογίστε τα όρια

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\pi\sqrt{3}}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$
3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(5+\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)$ *[Το θεώρημα της παρεμβολής ισχύει και για όρια καθώς $x\to\infty$.]*

Homework

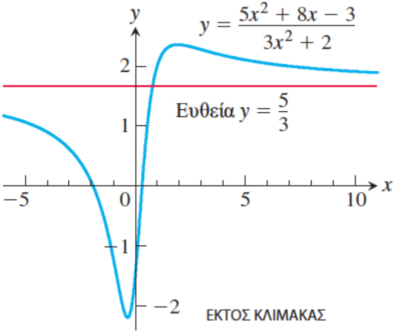
[Thomas 14th ed. §2.6, ασκ. 9,11] *Να βρεθούν τα όρια*

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(2x)}{x}$
2. $\lim_{t\to-\infty} \frac{2-t+\sin t}{t+\cos t}$

Ορισμός (Οριζόντια Ασύμπτωτη)

Η ευθεία $y = b$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ αν

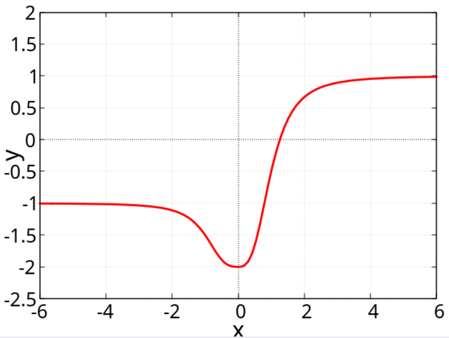
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad ή \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$



Άσκηση

Βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες για τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{|x|^3 + 1}$$



Ορισμός

Λέμε ότι η $f(x)$ τείνει στο άπειρο καθώς το x τείνει στο x_0, και γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ αν $\forall B > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(B) > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) > B \quad \textit{οποτεδήποτε} \quad 0 < |x - c| < \delta$$

Ορισμός

Λέμε ότι η $f(x)$ τείνει στο μείον άπειρο καθώς το x τείνει στο x_0, και γράφουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ αν $\forall B > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(B) > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) < -B \quad \textit{οποτεδήποτε} \quad 0 < |x - c| < \delta$$

Άσκηση

Υπολογίστε τα όρια

1. $\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{1}{x}$
2. $\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4}$
3. $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$
4. $\lim_{\theta\to 0^{+}} \cot\theta$

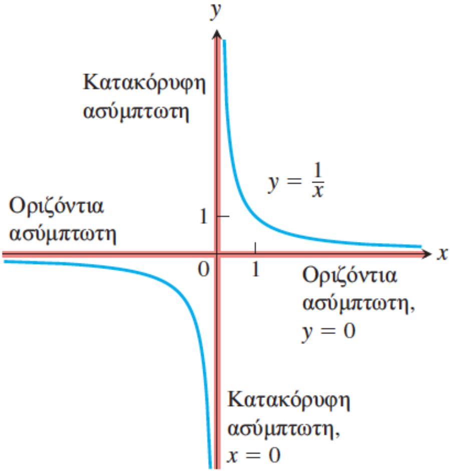
Ορισμός

Μια ευθεία $x = a$ *είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης* $y = f(x)$ *αν*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

ή αν

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$


y
Κατακόρυφη
ασύμπτωτη
$y = \frac{1}{x}$
Οριζόντια
ασύμπτωτη
1
0
1
x
Οριζόντια
ασύμπτωτη,
$y = 0$
Κατακόρυφη
ασύμπτωτη,
$x = 0$

Άσκηση

Βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$$