Άσκηση 1 *Έστω ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & -1 & -4 \\ 4 & -2 & 1 & 6 & 1 \end{bmatrix},$$

(i) *Να γίνει η διάσπαση LU του πίνακα A με μερική οδήγηση. Δηλαδή βρείτε ένα κάτω τριγωνικό πίνακα L με μονάδες στην διαγώνιο, ένα τετραγωνικό μεταθετικό πίνακα P και ένα άνω τριγωνικό πίνακα U τέτοιους ώστε να ισχύει*

$$PA = LU.$$

(ii) *Να υπολογιστεί η τάξη του πίνακα A καθώς και οι διαστάσεις των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων του A. (Χώρου στηλών $R(A)$, χώρου γραμμών $R\left(A^{\mathrm{T}}\right)$, μηδενόχωρου $N(A)$ και του αριστερού μηδενόχωρου $N\left(A^{T}\right)$.*

(iii) *Να βρεθούν βάσεις των παραπάνω υποχώρων.*

(iv) *Να λυθεί το γραμμικό σύστημα*

$$Ax = b,$$

χρησιμοποιώντας την παραπάνω ανάλυση LU για

$$b = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

(v) *Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ της λύσης του συστήματος και της βάσης του μηδενόχωρου.;*

Άσκηση 2 *[spa4]Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις εξετάστε αν τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα ή γραμμικά εξαρτημένα.*

i.

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \ \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \vec{v_4} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii.

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \ \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \ \vec{v_4} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

iii.

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}, \ \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \ \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \ \vec{v_4} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v_5} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 3 *ΔΕΛΗΣ - ΣΕΠ 2017 - ΘΕΜΑ 3*