Άσκηση 1 *Έστω το γραμμικό σύστημα* $A\vec{x} = \vec{b}$ *με*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -12 & -3 & 8 \\ -4 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ -21 \\ -7 \\ -25 \end{bmatrix} \tag{1}$$

1. *Χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς Gauss να βρεθεί και να λυθεί το ισοδύναμό γραμμικό σύστημα* $U\vec{x} = \vec{c}$.
2. *Επαληθεύστε την λύση (αντικαθιστώντας την στο αρχικό σύστημα).*

Άσκηση 2 *Έστω το γραμμικό σύστημα* $A\vec{x} = \vec{b}$ *με* A, b *όπως στην (1).*

1. *Βρείτε τους πίνακες* L *και* U *που προκύπτουν από την παραγοντοποίηση LU (χωρίς οδήγηση) του πίνακα A.*
2. *Κάνοντας πολλαπλασιασμό πινάκων επαληθεύστε ότι* $A = LU$.
3. *Υπολογίστε την λύση του συστήματος* $A\vec{x} = \vec{b}$ *χρησιμοποιώντας την παραπάνω παραγοντοποίηση LU (λύνοντας 2 τριγωνικά συστήματα).*

Άσκηση 3 *Να βρεθεί η ανάλυση* $LD\hat{U}$ *του πίνακα* A *της άσκησης 2.*

Άσκηση 4 *Έστω ο συμμετρικός πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθεί η ανάλυση $A = LDL^T$

(α) *Με απαλοιφή Gauss*

(β) *Χωρίς απαλοιφή Gauss*

Άσκηση 5 (Για εξάσκηση) *Έστω το γραμμικό σύστημα* $A\vec{x} = \vec{b}$ *με*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 9 & -2 & 1 \\ 15 & 6 & 12 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 27 \\ 45 \end{bmatrix}$$

1. *Βρείτε τους πίνακες* L *και* U *που προκύπτουν από την παραγοντοποίηση LU (χωρίς οδήγηση) του πίνακα A.*
2. *Κάνοντας πολλαπλασιασμό πινάκων επαληθεύστε ότι* $A = LU$.
3. *Υπολογίστε την λύση του συστήματος* $A\vec{x} = \vec{b}$ *χρησιμοποιώντας την παραπάνω παραγοντοποίηση LU (λύνοντας 2 τριγωνικά συστήματα).*
4. *Επαληθεύστε την λύση (αντικαθιστώντας την στο αρχικό σύστημα).*

Άσκηση 6 (Για εξάσκηση) *Έστω το γραμμικό σύστημα* $A\vec{x} = \vec{b}$ *με*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 1 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & -7 \\ 1 & 4 & -8 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{b} = \begin{bmatrix} -9 \\ 9 \\ -30 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. *Βρείτε τους πίνακες* L *και* U *που προκύπτουν από την παραγοντοποίηση LU (χωρίς οδήγηση) του πίνακα A.*
2. *Κάνοντας πολλαπλασιασμό πινάκων επαληθεύστε ότι* $A = LU$.
3. *Υπολογίστε την λύση του συστήματος* $A\vec{x} = \vec{b}$ *χρησιμοποιώντας την παραπάνω παραγοντοποίηση LU (λύνοντας 2 τριγωνικά συστήματα).*
4. *Επαληθεύστε την λύση (αντικαθιστώντας την στο αρχικό σύστημα).*

Απλή LU 4×4 φύλλο εργασίας

$A \sim \cdots \sim U$		Κατασκευή L
$\begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$	ΒΗΜΑ 1ο $E_2 \leftarrow E_2 - \underline{\qquad} E_1$ $E_3 \leftarrow E_3 - \underline{\qquad} E_1$ $E_4 \leftarrow E_4 - \underline{\qquad} E_1$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$	ΒΗΜΑ 2ο $E_3 \leftarrow E_3 - \underline{\qquad} E_2$ $E_4 \leftarrow E_4 - \underline{\qquad} E_2$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} & & & \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \end{bmatrix}$	ΒΗΜΑ 3ο $E_4 \leftarrow E_4 - \underline{\qquad} E_3$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} & & & \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$		