Άσκηση 1

[Δελής, Σεπ. 2019] Έστω πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \text{ και διανύσματα } \overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}^T \text{ και } \overrightarrow{y} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1. \end{bmatrix}$$

Υπολογίστε τις ποσότητες $\|A\left(A^TA\right)^{-1}A^T\|_1$ *και* A^Tx^TyA.

** Αν δεν εχετε διδαχθει τις νόρμες πινάκων υπολογίστε απλά τους πίνακες*

Άσκηση 2

[Δελής, Φεβ. 2020] Για τούς πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

και τα διανύσματα $\vec{x} = [-1,\ 2,\ 3]^T$ *και* $\vec{y} = [-2,\ 2]$ *υπολογίστε, όπου είναι δυνατόν, τις ποσότητες*

(i) $\|\vec{x}\,\vec{y}\,A\|_\infty$

(ii) $(A\,\vec{x}\,\vec{y})^{-1}$

(iii) $\|\vec{x}^TBA^T\|_1$

** Αν δεν εχετε διδαχθει τις νόρμες πινάκων υπολογίστε απλά τους πίνακες*

Άσκηση 3

Για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα στήλης $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ *ο πίνακας*

$$Q = I - \frac{2}{\vec{u}^T\vec{u}}\vec{u}\vec{u}^T$$

καλειται μετασχηματισμός του Householder.

(i) *Να αποδείξετε ότι ο πίνακας* Q *είναι συμμετρικός.*

(ii) *Να αποδείξετε ότι ο πίνακας* Q *είναι ορθογώνιος.*

Άσκηση 4

[≈ Δελής, Ιουν. 2020] Υποθέτοντας ότι οι πίνακες A, B και C είναι ομαλοί:

(i) *Απλοποιείστε όσο είναι δυνατόν το αριστερό μέλος της*

$$\left(2AC^T\right)^{-1}\left(CA^T\right)^T BX = B^{-1}D^T$$

(ii) *Υπολογίστε τον πίνακα X αν* $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ *και* $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

(iii) [Homework] *Αν $\vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ και $\|\vec{u}\|_2 = \|\vec{w}\|_2 = 5$ με $< \vec{u}, \vec{w} >= 0.5$, υπολογίστε την $\|\vec{u} - \vec{w}\|_2$.*

(iv) [Homework] *Υπολογίστε τον πίνακα* M *αν ισχύει ότι*

$$(5M + 4I)^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^T$$

(v) [Homework] *Απαντήστε, αιτιολογώντας, σωστό [Σ] ή λάθος [Λ] στη κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις :*

- (α΄) *Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ομαλοί, τότε το ίδιο ισχύει και για τον AB.*
- (β΄) *Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι ομαλοί, τότε το ίδιο ισχύει και για τον $A + B$.*
- (γ΄) *Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ομαλός, τότε $(kA)^{-1} = kA^{-1},\ k \in \mathbb{R}$.*
- (δ΄) *Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τότε, $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.*
- (ε΄) *Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει $(A - B)\,x = 0$ τότε $A = B$.*
- (στ΄) *Αν για ένα πίνακα $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $rank(B) = n$ ο B , είναι ομαλός.*