Άσκηση 1

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(i) *Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, $p_A(\lambda)$, του πίνακα A*

(ii) *Βρείτε τις ιδιοτιμές και την ορίζουσα του πίνακα A. Επαληθεύστε ότι το άθροισμα των ιδιοτιμών ισούται με το ίχνος του A. Χωρίς περαιτέρω πράξεις μπορούμε να αποφανθούμε για το αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος;*

(iii) *Για κάθε διακριτή ιδιοτιμή λ βρείτε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα (ή τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα).*

(iv) *Εξετάστε αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος. Αν είναι βρείτε τους πίνακες που τον διαγωνοποιούν. (Βρείτε και τους τρείς πίνακες S, Λ, S^{-1})*

(v) *Αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, βρείτε τις ιδιοτιμές, και την ορίζουσα του A^{100} καθώς και τον ίδιο τον πίνακα A^{100}.*

Άσκηση 2

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) *Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, $p_A(\lambda)$, του πίνακα A*

(ii) *Βρείτε τις ιδιοτιμές και την ορίζουσα του πίνακα A.*

(iii) *Χωρίς περαιτέρω πράξεις μπορούμε να αποφανθούμε για το αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος ;*

(iv) *Για κάθε διακριτή ιδιοτιμή λ βρείτε την διάσταση και μια βάση του $\boxed{\mathcal{N}(A-\lambda I)}$.* $\Longleftrightarrow$ ιδιοδιανύσματα

(v) *Για κάθε διακριτή ιδιοτιμή λ βρείτε m γραμμικώς ανεξάρτητα ιδοδιανύσματα, όπου m η διάσταση του $\mathcal{N}(A-\lambda I)$. (Αν m=1 βρείτε ένα ιδιοδιάνυσμα.)*

(vi) *Εξετάστε αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος. Αν είναι βρείτε τους πίνακες που τον διαγωνοποιούν.*

(vii) *Χρησιμοποιώντας μόνο την πληροφορία των ιδιοτιμών του A (δηλαδή υποθέστε ότι γνωρίζετε μόνο τις ιδιοτιμές του πίνακα και όχι τον ίδιο τον πίνακα) βρείτε τις ιδιοτιμές και την ορίζουσα των A^T και A^{-1} καθώς και τις ιδιοτιμές του πίνακα $B = A - 3I$.*

Άσκηση 3

Γνωρίζουμε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbf{R}^{10,10}$ έχει 91 μηδενικά 3 άσσους 2 δυάρια και 4 τέσσάρια. Υπολογίστε την ορίζουσα του.

Άσκηση 4

[Δελής Ιούνιος 2020] Ένας πίνακας $B \in \mathbb{R}^{2,2}$ έχει ορίζουσα 3 και ίχνος 2. Έχει ο B κάποια πραγματική ιδιοτιμή; ΟΧΙ

Άσκηση 5

[Δελής Ιούνιος 2020] Έστω πίνακας

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}}$$

Υπολογίστε τον A^{100} με χρήση του Θεωρήματος Cayley-Hamilton.

$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 3$

$\text{trace}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 2$

$\lambda^2 - \underbrace{2}_{S}\lambda + \underbrace{3}_{P} = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

$= (-2)^2 - 4\cdot 3 = -8 < 0$

ΔΕΝ έχει πραγμ. ρίζες

καθε nxn πινακας εχει n ιδιοτιμες (οχι κατα αναγκη διακριτες)

Οι απαντήσεις της άσκησης 1 μέχρι και το (v) ερώτημα χάθηκαν. Οπότε τις ξανα(καθαρο)γράφω. Από το ερώτημα (vi) και μετά το αρχείο περιέχει αυτά που είπαμε online στο zoom.

1

(i) $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \overset{(*)}{=} \begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$

$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[-\lambda(3-\lambda) - (-2)\cdot 1\right]$

$= (2-\lambda)\left[-3\lambda + \lambda^2 + 2\right] = (2-\lambda)\left[-3\lambda + \lambda^2 + 2\right] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$

$\overset{(**)}{=} (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-1).$

(*) θα αναλύσω την ορίζουσα ως προς την 2η στήλη διότι έχει γλιτώνω πράξεις.

(**) Προχωράω σε παραγοντοποίηση καθώς είμαι βέβαιος ότι στην συνέχεια θα μου ζητηθεί να λύσω το $p_A(\lambda) = 0$.

(ii) Ιδιοτιμές: $p_A(\lambda) = 0 \iff$

$(2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-1) = 0 \iff$

$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ [διπλή ιδιοτιμή].

Ορίζουσα: $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$

Ίχνος: $\to trace(A) = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} = 0 + 2 + 3 = 5$

$\to \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 2 + 2 = 5 \leftarrow$ ΙΣΑ

Είναι διαγωνοποιήσιμος? Δεν μπορώ να ξέρω διότι έχει μια πολλαπλή ιδιοτιμή $\lambda_2 = \lambda_3$

Αν όλες οι ιδιοτιμές του ήταν διαφορετικές μεταξύ τους (διακριτές) τότε θα ήμουν σίγουρος ότι διαγωνοποιείται.

(iii) Ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$. Επιλύω το σύστημα $(A - 1\cdot I)\vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Έχω μια ελεύθερη μεταβλητή την x_3. Άρα

$$\left.\begin{aligned} -x_1 - 2x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ x_3 &= \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= -2\alpha \\ x_2 &= \alpha \\ x_3 &= \alpha \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{ιδιοδιάνυσμα}}$$

Οπωσδήποτε όταν ψάχνω ιδιοδιανύσματα πρέπει να βγει τουλάχιστον μια ελεύθερη μεταβλητή. Αν δεν βγει κάπου έχω κάνει λάθος!

Άρα $\lambda_1 = 1 \rightarrow$ ιδιοδιάνυσμα $v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ιδιοτιμή $\lambda_{2,3} = 2$ Επιλύω το (Σ) $(A - 2I)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\sim} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ελεύθερες μεταβλητές x_2, x_3

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 - 2x_3 &= 0 \\ x_2 &= \alpha \in \mathbb{R} \\ x_3 &= b \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= -b \\ x_2 &= \alpha \\ x_3 &= b \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{ιδιοδιάνυσμα}} + b \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{ιδιοδιάνυσμα}}$$

Άρα

$\lambda_{2,3} = 2 \rightarrow$ Ιδιοδιανύσματα: $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(iv) Αφού βρήκα συνολικά 3 ιδιοδιανύσματα και ο πίνακας μου είναι 3x3 $\Longrightarrow$ ο A διαγωνοποιείται

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3\end{bmatrix} \qquad S=\begin{bmatrix}\vert & \vert & \vert\\ v_1 & v_2 & v_3\\ \vert & \vert & \vert\end{bmatrix}$$

$$\boxed{A = S\Lambda S^{-1}}$$

$$S^{-1} \longrightarrow \text{Gauss Jordan} \longrightarrow \begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix} = S^{-1}$$

v) $\sigma(A^{100}) = \{\lambda_1^{100}, \lambda_2^{100}, \lambda_3^{100}\} = \{1^{100}, 2^{100}, 2^{100}\}$

$$= \{1, 2^{100}, 2^{100}\}.$$

$$\det(A^{100}) = 1\cdot 2^{100}\cdot 2^{100} = 2^{200}$$

$$A^{100} = (S\Lambda \underbrace{S^{-1})(S}_{I}\Lambda \underbrace{S^{-1})\cdot(S}_{I}\Lambda \underbrace{S^{-1})\cdots(S}_{I}\Lambda S^{-1}) =$$

$$= (S\Lambda^{100}\cdot S^{-1}) = \rightsquigarrow \begin{bmatrix} S \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} S^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= V.$$

3) Αφού $\exists$ 9 μη-μηδενικά στοιχεία και η κάθε γραμμή έχει 10 στοιχεία $\Rightarrow$ υποχρεωτικά τουλάχιστον 1 γραμμή έχει μόνο 0 $\Rightarrow \det(A) = 0$

(5) $A = \begin{bmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$

Cayley-Hamilton: Κάθε πίνακας ικανοποιεί το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 \\ 4 & -7-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = \lambda^2 - 1$$

A ικανοποιεί το $p(\lambda)$: Σημαίνει $\boxed{p(A) = O} \iff$

$$A^2 - I = O \iff$$

$$\boxed{A^2 = I}$$ Σωθήκαμε !

$$A^{100} = (A^2)^{50} = I^{50} = I$$

(2) i) $p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$= (3-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) = +(3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$

$(3-\lambda)(2-\lambda)^2$

(ii) ιδιοτιμές $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ [διπλή ιδιοτιμή]

ορίζουσα $= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 12$

(iii) Όχι δεν μπορούμε (έχει ~~δι...~~ πολλαπλή ιδιοτιμή)

(iv) $\lambda_i \longrightarrow$ διάσταση και μια βάση $N(A-\lambda_i I)$

• $\lambda_1 = 3$, θα βρω μια βάση του $\boxed{N(\underbrace{A-3I}_{B})}$, επιλύοντας το (Σ)

$$\underbrace{(A-3I)}\vec{x} = \vec{0} \qquad \cancel{U\vec{x}=0}$$

x_1: ελεύθερη

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{\text{Gauss}}{\Longleftrightarrow} \cancel{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha \in \mathbb{R} \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Βάση του $N(A-3I)$ $= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

~~Διαστ~~ $\dim(N(A-3I)) = 1$

Ιδιοτιμή $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ βάση του μηδενοχώρου του $A-2I$, επιλύοντας

το Σ $(A-2I)\vec{x} = \vec{0} \Longleftarrow$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \overset{\Gamma_{\alpha\nu_3}}{\iff} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

ελεύθερη x_3

$$\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_3=\lambda\in\mathbb{R}\end{cases} \iff \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \to \text{Βάση του } N(A-2I)$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

Άρα ο vi

$\dim(N(A-2I))=1$

A ΔΕΝ είναι διαγωνοποιήσιμος (παρόλο που η ιδιοτιμή $\lambda_2=\lambda_3$ η του διπλή)

v) ιδιοτιμή $\lambda_1 \Longrightarrow$ ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

ιδιοτιμή $\lambda_2 \Rightarrow$ ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

~~vii~~

vii) $\sigma(A^T)=\sigma(A)=\{3,2,2\}$ ∃ ο A^{-1} ανν $\det(A)\neq 0$ $\iff \lambda_i\neq 0$

$\det(A^T)=3\cdot 2\cdot 2=12$

$\sigma(A^{-1})=\left\{\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\frac{1}{\lambda_3}\right\}=\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$

$\det(A^{-1})=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

$$B = A - 3I \rightarrow \begin{array}{l} \text{ιδιοτιμές} \\ \text{ορίζουσα} \end{array}$$

Έστω λ ιδιοτιμή του A και $\vec{v}$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα

$$\rightarrow A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow \quad A\vec{v} = 3\vec{v}$$

$$A\vec{v} - 3\vec{v} = \lambda\vec{v} - 3\vec{v} \Rightarrow$$

$$(A - 3I)\vec{v} = (\lambda - 3)\vec{v}$$

$$B\vec{v} = (\lambda - 3)\vec{v}$$

$$B\vec{v} = \mu\vec{v}, \quad \vec{v} \neq 0$$

μ ιδιοτιμή

ιδιοτιμές του B = $\lambda - 3$

$$= \{3-3, 2-3, 2-3\} = \{0, -1, -1\}$$