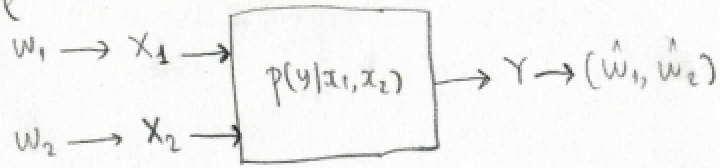
Seminar 2

Info Theory July 2009

MAC model



Discrete memoryless MAC.

– Ένας $((2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ κώδικας για το MAC αποτελείται από 2 σύνολα ακεραίων

$W_1 = \{1, \dots, 2^{nR_1}\}$, $W_2 = \{1, \dots, 2^{nR_2}\}$, δύο συναρτήσεις κωδικοποίησης

$$X_1 : W_1 \to \mathcal{X}_1^n, \quad X_2 : W_2 \to \mathcal{X}_2^n$$

και μία συνάρτηση αποκωδικοποίησης $g : \mathcal{Y}^n \to W_1 \times W_2$.

– Πιθανότητα σφάλματος δεδομένου ότι εστάλησαν οι κωδικές λέξεις i και j ενός κώδικα

$$\boxed{\lambda_{ij} = \sum_{y^n \in \mathcal{Y}^n} p(y^n | x_1^n(i), x_2^n(j))\, I\left(\mathrm{dec}(y^n) \neq (i,j)\right)}$$

και

$$\boxed{P_e^{(n)} = \frac{1}{2^{n(R_1+R_2)}} \sum_{i,j} \lambda_{ij}}$$

– Το ζεύγος (R_1, R_2) καλείται εφικτό αν $\exists$ ακολουθία $((2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$-κωδίκων με $P_e^{(n)} \to 0$ όταν $n \to \infty$.

– Η περιοχή χωρητικότητας (capacity region) είναι η θήκη (closure) του συνόλου των εφικτών (R_1, R_2).

ΘΕΩΡΗΜΑ: $(\mathcal{X}_1\times\mathcal{X}_2,\ p(y|x_1,x_2),\ \mathcal{Y})$. Η χωρητικότητα είναι η κλειστή κυρτή θήκη των (R_1,R_2) που ικανοποιούν

$$R_1 < I(X_1;Y|X_2),\quad R_2 < I(X_2;Y|X_1),\quad R_1+R_2 < I(X_1,X_2;Y)$$

για κάποια κατανομή $p_1(x_1)\cdot p_2(x_2)$ στο $\mathcal{X}_1\times\mathcal{X}_2$ (οι πηγές δεν συνεργάζονται).

- Αν συνεργάζονται πλήρως οι πηγές τότε ουσιαστικά έχουμε ένα SISO με $R=\sup\limits_{p(x_1,x_2)} I(X_1,X_2;Y)$?
- Υπάρχουν πολλά σενάρια συνεργασίας: ο ένας γνωρίζει το μήνυμα του άλλου, άρα και το σήμα το οποίο θα μπει στο κανάλι (cognitive scenario).

- Achievability: Έστω $p(x_1,x_2)=p_1(x_1)\cdot p_2(x_2)$.
  - Random coding: Δημιουργούμε 2^{nR_1} ανεξάρτητες κωδικές λέξεις $X_1^n(i)$, $i\in\{1,\dots,2^{nR_1}\}$ με $p(X_1^n(i))=\prod_{j=1}^{n} p_1(x_1(i,j))$. Όμοια, δημιουργούμε 2^{nR_2} ανεξ. κ.λ. $X_2^n(i)$, $i\in\{1,\dots,2^{nR_2}\}$. Φανερώνουμε τα codebooks.
  - Encoding: Sender 1: στέλνει μήνυμα i βάζοντας ως είσοδο την κ.λ. $X_1^n(i)$
    2: j $X_2^n(j)$
  - Decoding: $dec(Y^n)=(i,j)$ αν $(x_1^n(i),x_2^n(j),y^n)\in A_\epsilon^{(n)}$ και δεν υπάρχει $(\hat{i},\hat{j})\neq(i,j)$ τέτοιο ώστε $(x_1^n(\hat{i}),x_2^n(\hat{j}),y^n)\in A_\epsilon^{(n)}$. Διαφορετικά δηλώνεται σφάλμα.

Seminar 2 Info Theory July 2009 3

- Ανάλυση πιθανότητας σφάλματος: Θα υπολογίσουμε "μέση πιθανότητα σφάλματος πάνω σε όλους τους κώδικες και όλες τις εξόδους".
Η πιθανότητα αυτή είναι ανεξάρτητη των μηνυμάτων (i,j).
Θεωρούμε $(i,j)=(1,1)$.

Έστω $E_{ij} = \{ (X_1^n(i), X_2^n(j), Y^n) \in A_\epsilon^{(n)} \}$.

$$P_e^{(n)} = P\Big(E_{11}^c \cup \Big[\bigcup_{(i,j)\neq(1,1)} E_{ij} \Big] \Big) \leq P(E_{11}^c) + \sum_{i\neq 1, j=1} P(E_{i1}) + \sum_{i=1, j\neq 1} P(E_{1j}) + \sum_{i\neq 1, j\neq 1} P(E_{ij})$$

- $P(E_{11}^c) \to 0$

- $$P(E_{i1}) = P\big((X_1^n(i), X_2^n(1), Y^n) \in A_\epsilon^{(n)} \big) = \sum_{(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{y}) \in A_\epsilon^{(n)}} p_1(\underline{x}_1) \cdot p(\underline{x}_2, \underline{y}) \simeq \sum_{(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{y}) \in A_\epsilon^{(n)}} 2^{-nH(X_1)} \, 2^{-nH(X_2,Y)}$$

$$\simeq 2^{nH(X_1,X_2,Y)} \, 2^{-nH(X_1)} \, 2^{-nH(X_2,Y)} = 2^{-n(H(X_1)+H(X_2,Y)-H(X_1,X_2,Y))} \quad (*)$$

- $$H(X_1)+H(X_2,Y)-H(X_1,X_2,Y) = H(X_1)+H(X_2,Y) - [H(X_2,Y)+H(X_1|X_2,Y)] = H(X_1) - H(X_1|X_2,Y)$$

$$= I(X_1;X_2,Y) = I(X_1;X_2) + I(X_1;Y|X_2) = I(X_1;Y|X_2) \quad (**)$$

$(*), (**)$ $P(E_{i1}) \simeq 2^{-nI(X_1;Y|X_2)}$

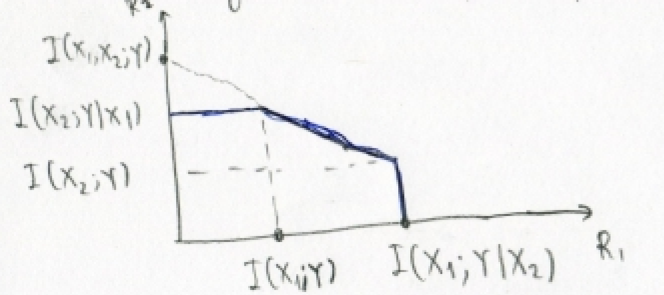
Όμοια $P(E_{1j}) \simeq 2^{-nI(X_2;Y|X_1)}$ για $j\neq 1$

$P(E_{ij}) \simeq 2^{-nI(X_1,X_2;Y)}$ για $i\neq 1$ και $j\neq 1$.

Άρα $P_e^{(n)} \le \epsilon + 2^{nR_1} 2^{-nI(X_1;Y|X_2)} + 2^{nR_2} 2^{-nI(X_2;Y|X_1)} + 2^{n(R_1+R_2)} 2^{-nI(X_1,X_2;Y)} < 4\epsilon$

αν ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος και n αρκετά μεγάλο.

Χωρητικότητα για δεδομένα $p_1(x_1)$, $p_2(x_2)$



Ας δούμε πόσο μεγάλο μπορεί να γίνει το R_1.

$$\max R_1 = \max_{p_1(x_1)p_2(x_2)} I(X_1;Y|X_2)$$

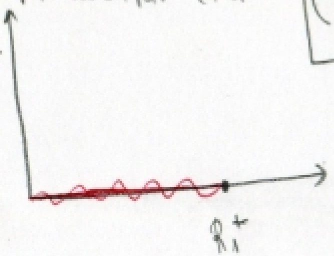
$$I(X_1;Y|X_2) = \sum_{x_2} p(x_2)\, I(X_1;Y|X_2=x_2) \le \max_{x_2} I(X_1;Y|X_2=x_2)$$

Άρα

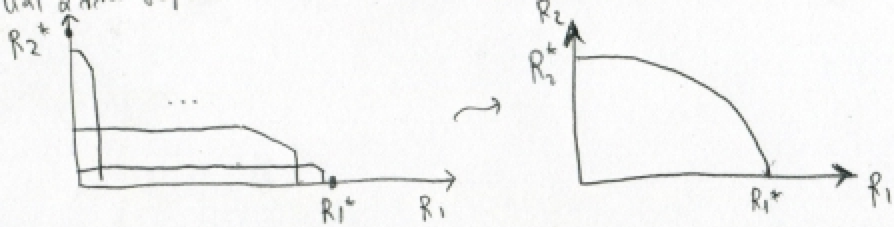
$$\boxed{\max R_1 = \max_{p_1(x_1)} \max_{x_2} I(X_1;Y|X_2=x_2)} \quad (*)$$

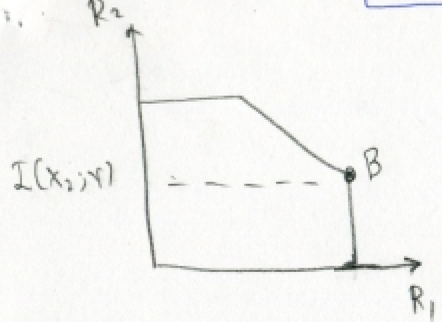
Στην περίπτωση (*), $R_2=0$ διότι ο 2 στέλνει "κωδικές λέξεις" της μορφής $\underbrace{x_2^* x_2^* \dots x_2^*}_{n}$ όπου $\boxed{x_2^* = \arg\max_{x_2} \left(\max_{p_1(x_1)} I(X_1;Y|X_2=x_2)\right)}$

και η περιοχή χωρητικότητας είναι $\boxed{(R_1, 0), \text{ με } 0 \le R_1 \le \max R_1}$



Αν επιτρέψουμε ο χρήστης 2 να στέλνει και άλλα σύμβολα εκτός του x_2^*, τότε αρχίζουμε να σχηματίζουμε πεντάγωνα





B: μέγιστος ρυθμός μετάδοσης του 2 ενώ υποστηρίζεται ο μέγιστος ρυθμός του 1.

Ο 1 θεωρείται ως θόρυβος, άρα δεν χρησιμοποιείται για την αποκωδικοποίηση του 2. Τότε το κανάλι είναι $\boxed{p(y|x_2) = \sum_{x_1} p(y|x_2,x_1)\, p(x_1)}$ και ο επιτεύξιμος ρυθμός $I(X_2;Y)$. Αφού αποκωδικοποιηθεί η κωδική λέξη X_2^n, "αφαιρείται" η επίδραση του από το Y^n.

Το κανάλι θεωρείται ακολουθία δεικτοδοτημένων SISO καναλιών. Για το k-οστό σύμβολο $X_1^n(i,k)$ το κανάλι είναι $p(y|x_1, X_2^n(i,k))$. Αν $x_2^n(i,k)=x_2$, τότε η αμοιβαία πληροφορία ανάμεσα στην είσοδο 1 και την έξοδο είναι

$I(X_1;Y|X_2=x_2)$ και τελικά ο επιτεύξιμος ρυθμός είναι

$$I(X_1;Y|X_2) = \sum_{x_2} p_2(x_2)\, I(X_1;Y|X_2=x_2)$$

– Successive cancelation decoding

Κυρτότητα Περιοχής Σύγκλισης

<u>Θεώρημα</u>: Η περιοχή χωρητικότητας C του MAC είναι κυρτή. Δηλαδή, αν $(R_1,R_2)\in C$ και $(R_1',R_2')\in C$, τότε

$$\lambda(R_1,R_2)+(1-\lambda)(R_1',R_2')\in C.$$

<u>Απόδειξη</u>: Μέσω time-sharing. $\underline{R}=\binom{R_1}{R_2}$, $\underline{R}'=\binom{R_1'}{R_2'}$. Χρησιμοποιώντας το πρώτο codebook για τα πρώτα λn σύμβολα και το δεύτερο για τα $(1-\lambda)n$, έχουμε $2^{\lambda n R_1}\cdot 2^{(1-\lambda)nR_1'} = 2^{n(\lambda R_1+(1-\lambda)R_1')}$ κωδικές λέξεις $X_1^n(i_1,i_2)$ με $X_1^n(i_1,i_2)=[X_1^{\lambda n}(i_1)\; X_1^{(1-\lambda)n}(i_2)]$. Αντίστοιχα για τον 2.

Seminar 2

Info Theory July 2009

Αποκωδικοποιούμε σταδιακά τα (i_1, j_1) και κατόπιν τα (i_2, j_2) με πιθανότητα σφάλματος αυθαίρετα μικρή

Θέτουμε $I_1 = I(X_1; Y|X_2)$

$I_2 = I(X_2; Y|X_1)$ Τότε $C_{\underline{I}} = \{(R_1, R_2) : 0 \leq R_1 \leq I_1,\ 0 \leq R_2 \leq I_2,\ R_1 + R_2 \leq I_3\}$.

$I_3 = I(X_1, X_2; Y)$ Για κάθε $p_1(x_1) \cdot p_2(x_2)$, $I_1 + I_2 \geq I_3$.

Λήμμα: Έστω $\underline{I}_1, \underline{I}_2 \in \mathbb{R}^3$, ορίζουν περιοχές $C_{\underline{I}_1}$ και $C_{\underline{I}_2}$. Για $0 \leq \lambda \leq 1$, ορίζουμε $\underline{I}_\lambda = \lambda \underline{I}_1 + (1-\lambda)\underline{I}_2$ και έστω $C_{\underline{I}_\lambda}$ η περιοχή που ορίζεται από το $\underline{I}_\lambda$. Τότε

$$\boxed{C_{\underline{I}_\lambda} = \lambda C_{\underline{I}_1} + (1-\lambda) C_{\underline{I}_2}}$$

περιοχή που ορίζεται από κυρτό συνδυασμό $\underline{I}$'s   κυρτός συνδυασμός περιοχών.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Η κυρτή θήκη της ένωσης των περιοχών ρυθμών που ορίζονται από ατομικά διανύσματα $\underline{I}$ ισούται με την περιοχή που ορίζεται από την κυρτή θήκη των διανυσμάτων $\underline{I}$.

T.S. Han 1979

Θεώρημα: Η περιοχή χωρητικότητας του discrete memoryless MAC είναι η θήκη του συνόλου των (R_1, R_2) που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$(*) \quad R_1 < I(X_1;Y|X_2,Q), \quad R_2 < I(X_2;Y|X_1,Q), \quad R_1+R_2 < I(X_1,X_2;Y|Q)$$

για οποιαδήποτε επιλογή από-κοινού πιθανότητας $p(q)\,p(x_1|q)\,p(x_2|q)\,p(y|x_1,x_2)$, με $|Q| \leq 4$.

Απόδειξη:

$$I(X_1;Y|X_2,Q) = \sum_{q=1}^{m} p(q)\, I(X_1;Y|X_2,Q=q) = \sum_{q=1}^{m} p(q)\, I(X_1;Y|X_2)_{p(x_1|q),\,p(x_2|q)} \quad (!)$$

Αν θέσουμε $p_1(x_1) = p(x_1|q)$, $p_2(x_2) = p(x_2|q)$ τότε $\underline{R}_q = \begin{pmatrix} R_{1q} \\ R_{2q} \end{pmatrix}$ με

$$\begin{aligned} R_{1q} &< I(X_1;Y|X_2)_{p(x_1|q),\,p(x_2|q)} \\ R_{2q} &< I(X_2;Y|X_1)_{p(x_1|q),\,p(x_2|q)} \qquad (**) \\ R_{1q}+R_{2q} &< I(X_1,X_2;Y)_{p(x_1|q),\,p(x_2|q)} \end{aligned}$$

είναι επιτεύξιμο.

Αν $\underline{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ ικανοποιεί τις $(*)$, εκφράζοντας τις $(*)$ όπως στην $(!)$, βρίσκουμε επιτεύξιμα $\underline{R}_q$ με

$$\underline{R} = \sum_{q=1}^{m} p(q)\, \underline{R}_q$$

και αφού κυρτοί συνδυασμοί επιτεύξιμων ρυθμών είναι επιτεύξιμοι. Πιο αναλυτικά

$$\begin{aligned} R_{1q} &< I_{1q} & & \underline{R}: \sum p(q) R_{1q} < \sum p(q) I_{1q} & & R_1 < I(X_1;Y|X_2,Q) \\ R_{2q} &< I_{2q} & \Rightarrow\ & \sum p(q) R_{2q} < \sum p(q) I_{2q} & \Rightarrow\ & R_2 < I(X_2;Y|X_1,Q) \\ R_{1q}+R_{2q} &< I_{3q} & & \sum p(q)(R_{1q}+R_{2q}) < \sum p(q) I_{3q} & & R_1+R_2 < I(X_1,X_2;Y|Q) \end{aligned}$$

Ο περιορισμός $|Q| \leq 4$ είναι απόρροια του επόμενου θεωρήματος.

Θεώρημα (Carathéodory) Κάθε σημείο της κλειστής κυρτής θήκης ενός συμπαγούς συνόλου A σε ένα d-διάστατο Ευκλείδιο χώρο μπορεί να γραφτεί σαν κυρτός συνδυασμός $(d+1)$ ή λιγότερων σημείων του αρχικού συνόλου A.

Χωρίς τον περιορισμό για το $|Q|$ δεν θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την περιοχή χωρητικότητας. Αν ~~$|Q|$~~ η περιοχή μεγάλωνε όσο μεγάλωνε ~~[illegible]~~ το $|Q|$ δεν θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την περιοχή.

Converse Αν υπάρχει ακολουθία $((2^{nR_1}, 2^{nR_2}), n)$ κωδίκων με $P_e^{(n)} \to 0$, τότε

$$R_1 \leq I(X_1;Y|X_2,Q), \quad R_2 \leq I(X_2;Y|X_1,Q), \quad R_1+R_2 \leq I(X_1,X_2;Y|Q) \quad (*)$$

για Q πάνω στο $\{1,2,3,4\}$ και από-κοινού σ.μ.π. $p(q)\,p(x_1|q)\,p(x_2|q)\,p(y|x_1,x_2)$

Απόδειξη: Fix n. Θεωρούμε "καλό" κώδικα. $W_1 \times W_2 \times X_1^n \times X_2^n \times Y^n$

$$p(w_1,w_2,x_1^n,x_2^n,y^n) = p(w_1)\,p(w_2)\,p(x_1^n|w_1)\,p(x_2^n|w_2)\prod_{i=1}^{n} p(y_i|x_{1i},x_{2i})$$

Fano: $H(W_1,W_2|Y^n) \leq H(P_e^{(n)}) + n(R_1+R_2)P_e^{(n)} = n\varepsilon_n$ με $\varepsilon_n \to 0$ as $n \to \infty$. Τότε

$$H(W_1|Y^n) \leq H(W_1,W_2|Y^n) \leq n\epsilon_n$$
$$H(W_2|Y^n) \leq H(W_1,W_2|Y^n) \leq n\epsilon_n$$

Για το R_1:

$$\left.\begin{aligned} nR_1 = H(W_1) &= I(W_1;Y^n) + H(W_1|Y^n) \leq I(W_1;Y^n) + n\epsilon_n \\ I(W_1;Y^n) &\leq I(X_1^n(W_1);Y^n) \ \ldots \leq \sum_{i=1}^{n} I(X_{1i};Y_i|X_{2i}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow R_1 < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_{1i};Y_i|X_{2i}) + \epsilon_n$$

Όμοια
$$R_2 \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_{2i};Y_i|X_{1i}) + \epsilon_n$$
$$R_1 + R_2 \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_{1i},X_{2i};Y_i) + \epsilon_n$$

Οι παραπάνω εκφράσεις είναι μέσες τιμές mutual info calculated at the empirical distributions of col i.
Μπορούμε να εισάγουμε το Q με τιμές στο $\{1,\dots,n\}$ και $p(Q=i)=\frac{1}{n}$, $i=1,\dots,n$. Τότε

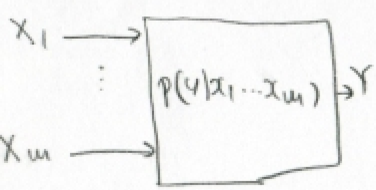
$$R_1 \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_{1i};Y_i|X_{2i}) + \epsilon_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_{1Q};Y_Q|X_{2Q}, Q=i) + \epsilon_n$$
$$= I(X_{1Q};Y_Q|X_{2Q},Q) + \epsilon_n = I(X_1;Y|X_2,Q) + \epsilon_n$$

όπου $X_1 \triangleq X_{1Q}$, $X_2 \triangleq X_{2Q}$, $Y \triangleq Y_Q$, νέες τυχαίες μεταβλητές, η κατανομή των οποίων εξαρτάται από το Q όπως εξαρτάται η κατανομή των X_{1i}, X_{2i}, Y_i από το i. Αφού W_1 και W_2 ανεξάρτητα, $X_{1i}(W_1)$ και $X_{2i}(W_2)$ ανεξάρτητα και

!! $\boxed{\Pr(X_{1Q}=x_1|Q=i)\cdot\Pr(X_{2Q}=x_2|Q=i) = \Pr\{X_{1i}(W_1)=x_1, X_{2i}(W_2)=x_2\}.}$!!

Η περιοχή δεν αλλάζει αν $|Q|\le 4$ αντί για $|Q|=n$!!

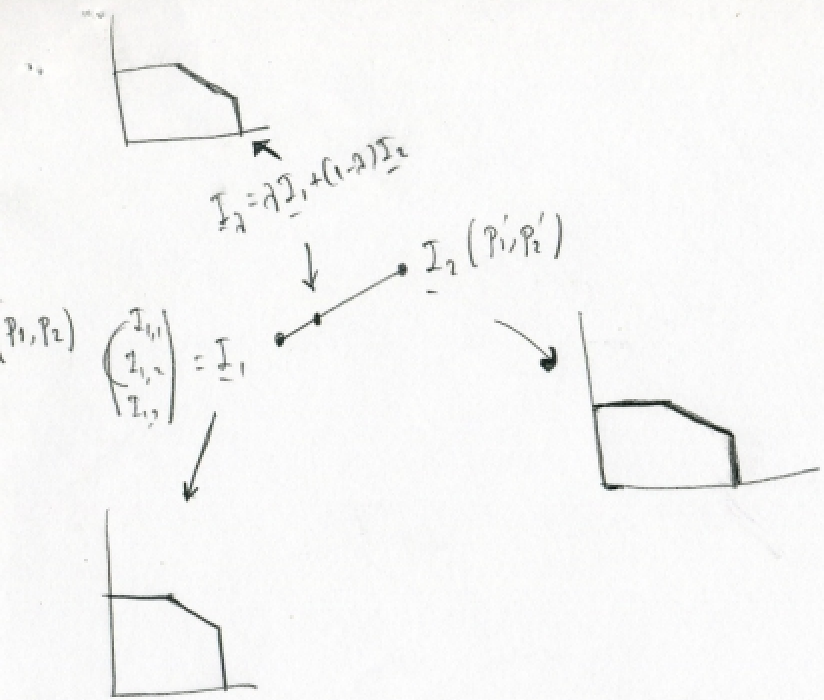
m-user MAC



Θεώρημα: $\forall S \subseteq \{1,\dots,m\}$, $R(S) \le I(X(S);Y|X(S^c))$

$2^m - 1$ constraints.

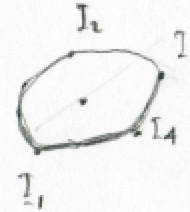
Rate region: polymatroid.



$\lambda C_{\underline{I}_1} + (1-\lambda) C_{\underline{I}_2} \subseteq C_{\underline{I}_\lambda}$

Κάθε σημείο I_i επιτυγχάνεται με ένα $p_1(x_1)\, p_2(x_2)$.

Οποιοδήποτε σημείο του convex hull επιτυγχάνεται ως $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i \underline{I}_i$ για κάποια $\lambda_i, \underline{I}_i$

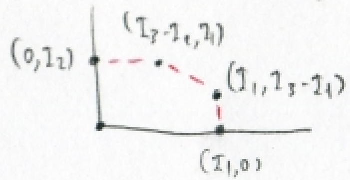


Cardinality of U.

Κατασκευάζουμε το convex hull των I_i's. Χρησιμοποιούμε το Caratheodory

To prove the reverse, we consider the extreme points of pentagonal regions.

! Capacity region C_I convex hull of



Seminar 2

Info Theory July 2009

MAC: Fine details in the converse

Είδαμε ότι

$$R_1 < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_{1i};Y_i|X_{2i})$$

$$R_2 < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_{2i};Y_i|X_{1i})$$

$$R_3 = R_1+R_2 < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_{1i},X_{2i};Y_i)$$

Ορίζουμε $\underline{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$ και $\underline{I}_i = \begin{pmatrix} I(X_{1i};Y_i|X_{2i}) \\ I(X_{2i};Y_i|X_{1i}) \\ I(X_{1i},X_{2i};Y_i) \end{pmatrix}$

Άρα $\boxed{\underline{R} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \underline{I}_i}$

① Η ποσότητα $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \underline{I}_i$ είναι κυρτός συνδυασμός των $\underline{I}_1, \dots, \underline{I}_n$, συνεπώς μπορεί να γραφεί σαν

$$\lambda_1 \underline{I}_{i_1} + \lambda_2 \underline{I}_{i_2} + \lambda_3 \underline{I}_{i_3} + \lambda_4 \underline{I}_{i_4}$$ για

$0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 1$ και $\underline{I}_{i_k} \in \{\underline{I}_1, \dots, \underline{I}_n\}$.

② $\forall i$, $\underline{I}_i$ περιέχει ακριβώς πληροφορίες υπολογισμένες στην σμπ

$$P_i(x_1,x_2,y) = p(y|x_1,x_2) \underbrace{\Pr\{X_{1i}=x_1, X_{2i}=x_2\}}_{P_i}$$

όπου η P_i υπολογίζεται βάσει του δεδομένου κώδικα.

Έχουμε βάλει, όμως, έναν περιορισμό για τους κώδικες. X_1^n και X_2^n είναι ανεξάρτητα.

Ερώτημα:

$\exists$ σμπ $p_{1i}(x_1), p_{2i}(x_2)$ τέτοιες ώστε

$$\Pr\{X_{1i}=x_1, X_{2i}=x_2\} = p_{1i}(x_1) \cdot p_{2i}(x_2)?$$

Αν ναι, ποιες?

⊛ Αν η απάντηση είναι καταφατική, τότε θα έχουμε αποδείξει ότι

$\underline{I}_{i_k}$ είναι επιτεύξιμο με $p_1(x_1) \cdot p_2(x_2)\, p(y|x_1,x_2)$

Τα λ_i είναι η $p(q)$.

Απάντηση στο ερώτημα:

Έχοντας ορίσει την από-κοινού σμπ ως

$$p(w_1,w_2,x_1^n,x_2^n,y^n) = p(w_1) \cdot p(w_2) \cdot p(x_1^n|w_1) \cdot p(x_2^n|w_2)\, q(y^n|x_1^n,x_2^n)$$

λαμβάνουμε ότι $\Pr\{X_{1i}=x_1, X_{2i}=x_2\} = \frac{n_i^{X_1}(x_1)}{2^{nR_1}} \cdot \frac{n_i^{X_2}(x_2)}{2^{nR_2}}$

με $n_i^{X_j}(x) =$ # εμφανίσεων του x στην i-οστή θέση του j-οστού codebook

!

PTO Απόδειξη

Απόδειξη: Note $\boxed{\sum_y p(y|x) = 1}$

Αρχίζουμε από $p(w_1, w_2, x_1^n, x_2^n, y^n)$

$$p(w_1, w_2, x_1^n, x_2^n) = \sum_y \left(p(w_1) \cdot p(w_2)\, p(x_1^n|w_1)\, p(x_2^n|w_2)\, p(y^n|x_1^n, x_2^n) \right) \overset{!}{=} p(w_1)\, p(w_2)\, p(x_1^n|w_1)\, p(x_2^n, w_2)$$

$$p(x_1^n, x_2^n) = \left[\sum_{w_1} p(w_1)\, p(x_1^n|w_1)\right] \left[\sum_{w_2} p(w_2) \cdot p(x_2^n|w_2)\right] = \frac{\#\text{εμφ } x_1^n \text{ στο } C_1}{2^{nR_1}} \cdot \frac{\#\text{εμφ } x_2^n \text{ στο } C_2}{2^{nR_2}}.$$

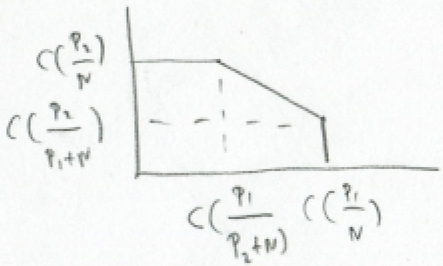
$$p\left(X_1(i) = x_1, X_2(i) = x_2\right) = \frac{\#\text{εμφ } x_1 \text{ στην } i\text{-οστή στήλη του } C_1}{2^{nR_1}} \cdot \frac{\#\text{εμφ. } x_2 \text{ στην } i\text{-οστή στήλη του } C_2}{2^{nR_2}}.$$

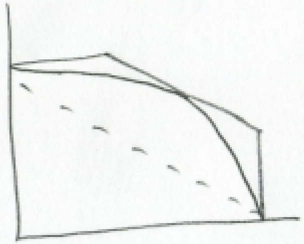
Gaussian MAC

$$W_1 \to X_1^n \searrow \quad Z^n \downarrow \quad \nearrow X_2^n \leftarrow W_2 \quad \oplus \to Y^n \to (\hat{W}_1, \hat{W}_2)$$

power constraint: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ji}^2(w_j) \le P_j, \quad j=1,2, \; w_j \in \{1,..,2^{nR_j}\}$

$$C(x) = \frac{1}{2}\log(1+x)$$





Corresponds to CDMA with successive decoding.

FDMA: P_1, P_2, W

$R_1 = W_1 \log\left(1+\frac{P_1}{NW_1}\right) \to$ spectrall efficienty $\frac{R_1}{W}$

$R_2 = W_2 \log\left(1+\frac{P_2}{NW_2}\right)$ $\quad \frac{R_2}{W}$

TDMA: