

**Άσκηση 1** Βρείτε τους όρους  $a_1, a_2, a_3, a_4$  για την ακολουθία

$$a_n = \frac{1}{(n-1)!}$$

**Άσκηση 2** Γράψτε τους 6 πρώτους όρους της ακολουθίας

$$a_1 = 2, \text{ και } a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} a_n}{2} \text{ για } n > 1$$

**Άσκηση 3** Βρείτε τύπο για το  $n$ -οστό όρο της ακολουθίας

$$\left\{ +1, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, +\frac{1}{25}, \dots \right\}$$

**Άσκηση 4** Δώστε τον ορισμό της αποκλίνουσας ακολουθίας στο  $-\infty$ .

**Άσκηση 5** Συμπληρώστε τα κενά στο παρακάτω θεώρημα:

**Θεώρημα 1 (Ιδιότητες ορίων ακολουθιών)** Έστω  $a_n$  και  $b_n$  ακολουθίες πραγματικών αριθμών και  $A$  και  $B$  πραγματικοί αριθμοί. Έστω  $a_n \rightarrow A$  και  $b_n \rightarrow B$ . Ισχύουν τότε οι ακόλουθες ιδιότητες:

Όριο αθροίσματος:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \underline{\hspace{2cm}}$

Όριο Διαφοράς:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \underline{\hspace{2cm}}$

Όριο γινομένου:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \underline{\hspace{2cm}}$

Όριο σταθερού πολλαπλασίου:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot b_n) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

Όριο πηλίκου:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $B \neq 0$

**Άσκηση 6** Βρείτε, αν συγκλίνει, το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \frac{-1}{n}$$

**Άσκηση 7** Βρείτε, αν συγκλίνει, το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \frac{n-1}{n}$$

**Άσκηση 8**

Βρείτε, αν συγκλίνει, το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \frac{5}{n^2}$$

**Άσκηση 9** Βρείτε, αν συγκλίνει, το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \frac{1-5n^4}{n^4+8n^3}$$

**Άσκηση 10** Βρείτε, αν συγκλίνει, το όριο της ακολουθίας

$$a_n = 1 + (-1)^n$$

**Άσκηση 11**

Συμπληρώστε τα κενά στο παρακάτω θεώρημα:

**Θεώρημα 2 (Θεώρημα σάντουιτς για ακολουθίες, squeeze principle)** Έστω  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ , και  $\{c_n\}$  ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αν  $a_n \leq b_n \leq c_n$  για κάθε  $n$  πέραν κάποιου  $N$  και αν  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  και  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$ , τότε θα ισχύει επίσης  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$ .

Επίσης προσπαθήστε να κάνετε ένα σχήμα.

**Άσκηση 12**

Δείξτε, με χρήση του Θεωρήματος σάντουιτς για ακολουθίες, ότι

$$\frac{\cos n}{n^2} \rightarrow 0$$

**Άσκηση 13**

Δείξτε, με χρήση του Θεωρήματος σάντουιτς για ακολουθίες, ότι

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$$

**Άσκηση 14**

Δείξτε, με χρήση του Θεωρήματος συνεχούς συνάρτησης για ακολουθίες, ότι

$$\cos \frac{3}{n^2} \rightarrow 1$$

**Άσκηση 15**

Δείξτε ότι

$$\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$$

**Άσκηση 16**

Συμπληρώστε (και μάθετε απ' έξω!) τα παρακάτω βασικά όρια

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \underline{\hspace{2cm}}$	2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \underline{\hspace{2cm}}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = \underline{\hspace{2cm}}, (c > 0)$	4. $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = \underline{\hspace{2cm}}, ( c  < 1)$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n = \underline{\hspace{2cm}}, c \in \mathbb{R}$	6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{n!} = \underline{\hspace{2cm}}$

**Άσκηση 17** Βρείτε, αν υπάρχει, το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n^2}{n}$$

**Άσκηση 18** Βρείτε, αν υπάρχει, το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2}$$

**Άσκηση 19** Βρείτε, αν υπάρχει, το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

**Άσκηση 20** Βρείτε, αν υπάρχει, το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n}$$

**Άσκηση 21** Βρείτε, αν υπάρχει, το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n$$

**Άσκηση 22** Βρείτε, αν υπάρχει, το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100^n}{n!}$$

**Άσκηση 23** [Thomas §10.1, ασκ. 45] Ελέγξτε αν η παρακάτω ακολουθία συγκλίνει ή αποκλίνει. Αν είναι συγκλίνουσα βρείτε το όριο της.

$$a_n = \frac{\sqrt{2n}}{n+1}$$

**Άσκηση 24** [Thomas §10.1, ασκ. 51] Ελέγξτε αν η παρακάτω ακολουθία συγκλίνει ή αποκλίνει. Αν είναι συγκλίνουσα βρείτε το όριο της.

$$a_n = \frac{n}{2^n}$$

**Άσκηση 25** [Thomas §10.1, ασκ. 55] Ελέγξτε αν η παρακάτω ακολουθία συγκλίνει ή αποκλίνει. Αν είναι συγκλίνουσα βρείτε το όριο της.

$$a_n = 8^{\frac{1}{n}}$$

**Άσκηση 26** [Thomas §10.1, ασκ. 61] Ελέγξτε αν η παρακάτω ακολουθία συγκλίνει ή αποκλίνει. Αν είναι συγκλίνουσα βρείτε το όριο της.

$$a_n = \left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

**Άσκηση 27** [Thomas §10.1, ασκ. 67] Ελέγξτε αν η παρακάτω ακολουθία συγκλίνει ή αποκλίνει. Αν είναι συγκλίνουσα βρείτε το όριο της.

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

**Άσκηση 28** Να δείξετε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+2}\right)^n = e^{-2}$$

**Άσκηση 29** Να δείξετε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n-1}\right)^n = e^4$$

**Άσκηση 30** Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονων ακολουθιών, να δείξετε ότι η ακολουθία

$$a_n = \frac{4^n}{n!}$$

συγκλίνει.

**Άσκηση 31** Η παρακάτω σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει; Αν συγκλίνει βρείτε το άθροισμα.

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots$$

**Άσκηση 32** Η παρακάτω γεωμετρική σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει; Αν συγκλίνει βρείτε το άθροισμα.

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \dots$$

**Άσκηση 33** Η παρακάτω γεωμετρική σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει; Αν συγκλίνει βρείτε το άθροισμα.

$$8 + 2 + \frac{1}{2} + \dots$$



**Άσκηση 34** Η παρακάτω γεωμετρική σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει; Αν συγκλίνει βρείτε το άθροισμα.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

**Άσκηση 35** [Thomas §10.2, ασκ. 5] Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, την σειρά

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$$

**Άσκηση 36** Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, την σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$$

**Άσκηση 37** [Thomas §10.2, ασκ. 8] Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, την σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4^n}$$

**Άσκηση 38** Εκφράστε τον αριθμό  $0.\overline{234}$  ως λόγο δυο ακεραίων

**Άσκηση 39** Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n} = \frac{5}{6}$$

**Άσκηση 40** Χρησιμοποιώντας ένα τετράγωνο  $1 \times 1$  δείξτε ότι

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$

**Άσκηση 41** [Thomas §10.2, ασκ. 64] Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

και

$$\sum_{n=1000}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

**Άσκηση 42** [Thomas §10.2, ασκ. 87] Γράψτε την σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

ως άθροισμα με δείκτη που ξεκινά από την τιμή:

(i)  $n = -2$

(ii)  $n = 0$

(iii)  $n = 5$

(iv)  $n = -1$

**Άσκηση 43** [Thomas §10.2, ασκ. 98] Βρείτε την τιμή του  $b$  για την οποία

$$1 + e^b + e^{2b} + e^{3b} + e^{4b} + \dots = 9$$

**Άσκηση 44** [Thomas §10.2, ασκ. 41] Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, την σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ln \sqrt{n+1} - \ln \sqrt{n})$$

**Άσκηση 45** [Thomas §10.3, ασκ. 3] Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$$

**Άσκηση 46** [Thomas §10.3, ασκ. 3] Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 4}$$

[Homework]

**Άσκηση 47** [Thomas §10.3, ασκ. 5] Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}$$

[Homework]

**Άσκηση 48** [Thomas §10.3, ασκ. 17] Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$$

**Άσκηση 49** [Thomas §10.4, ασκ. 1] Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 30}$$

**Άσκηση 50** [Thomas §10.4, ασκ. 3] Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, τη σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - 1}$$

**Άσκηση 51** [Thomas §10.4, ασκ. 9] Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - 2}{n^3 - n^2 + 3}$$

**Άσκηση 52** [Thomas §10.4, ασκ. 15] Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, τη σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

**[Homework]**

**Άσκηση 53** [Thomas §10.5, ασκ. 1] Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

**Άσκηση 54** [Thomas §, ασκ. ] Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

**Άσκηση 55** Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

**Άσκηση 56** Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$$

[Homework]

Άσκηση 57 Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$$

[Homework]

Άσκηση 58 Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$$

Άσκηση 59 Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 + 3n)^n}{(4n^2 + 5)^n}$$

[Homework]

Άσκηση 60 Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(\ln n)^n}$$

[Homework]

Άσκηση 61 [Thomas §10.5, ασκ. 16] Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1+n}}$$

[Homework]

Άσκηση 62 Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$



**Άσκηση 63** Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$$

**Άσκηση 64** Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, τη σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(\ln n)}$$

**Άσκηση 65** Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{4n-1}$$

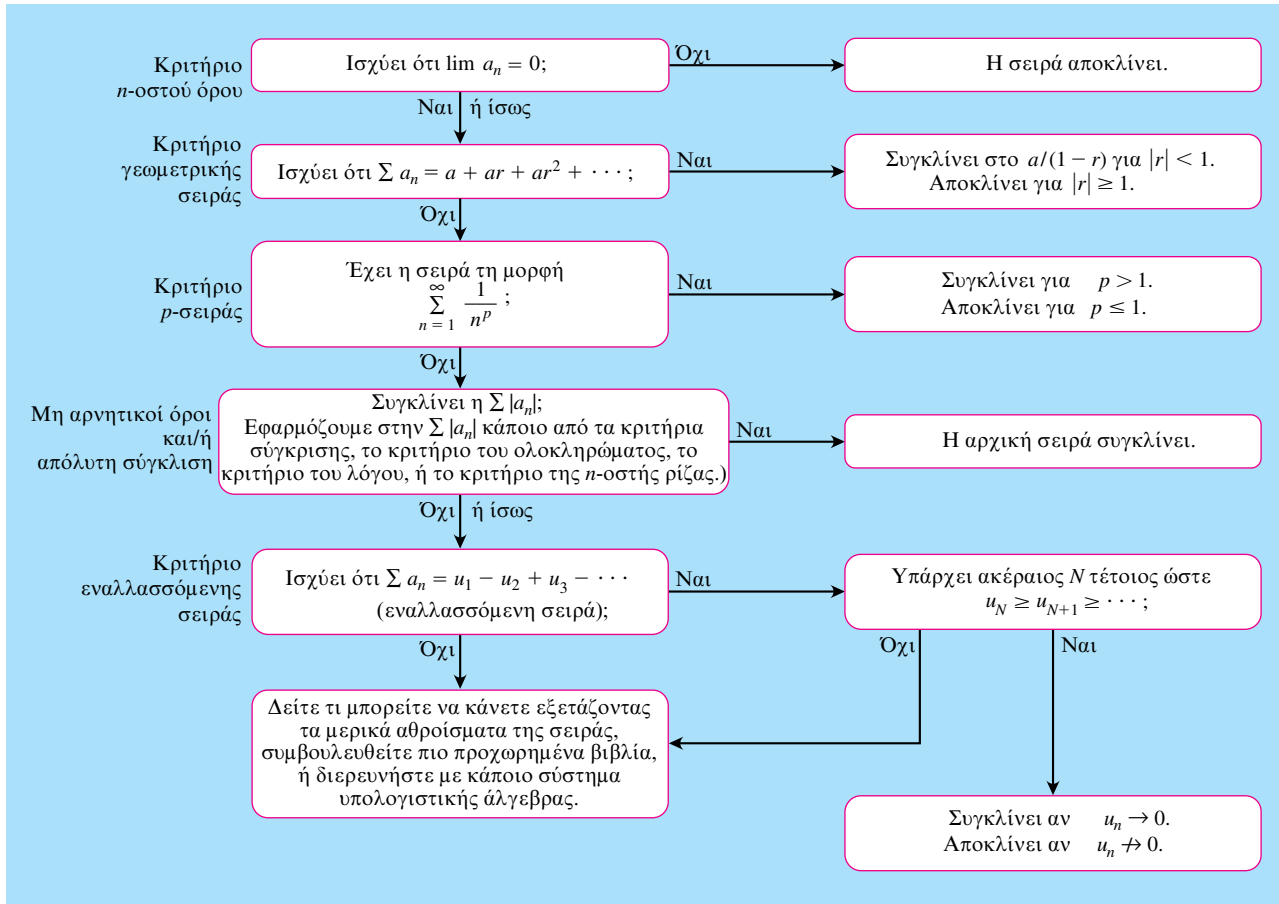
[Homework]

**Άσκηση 66** [Thomas §10.6, ασκ. 13] Μελετήστε, ως προς την σύγκλιση, τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n} + 1}{n + 1}$$

[Homework]

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια ενδεικτική διαδικασία προσδιορισμού σύγκλισης.



Σχήμα 1: Πηγή: <https://www.cup.gr/book/apirostikos-logismos-tomos-ii/>



**Άσκηση 67** [Thomas §13.1, ασκ. 2] Βρείτε το όριο

$$\lim_{t \rightarrow -1} \left[ t^3 \mathbf{i} + \left( \sin \frac{\pi}{2} t \right) \mathbf{j} + \ln(t + 2) \mathbf{k} \right]$$

**Άσκηση 68** [Thomas §13.1, ασκ. 10≈] Το διάνυσμα θέσης ενός σωματιδίου που κινείται πάνω στο  $xy$  επίπεδο είναι:

$$\mathbf{r}(t) = 4 \cos \frac{t}{2} \mathbf{i} + 4 \sin \frac{t}{2} \mathbf{j}$$

- Η καμπύλη αυτή περιγράφει τον κύκλο \_\_\_\_\_
- Για την χρονική στιγμή  $t = \pi$  βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σωματιδίου.
- Σχεδιάστε αυτά τα δυο διανύσματα πάνω στην καμπύλη.

**Άσκηση 69** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/3} \left[ \sin(2t) \mathbf{i} + \tan(t) \mathbf{j} + e^{-2t} \mathbf{k} \right] dt$$

**Άσκηση 70** [Thomas §13.3, ασκ. 2] Έστω η καμπύλη

$$\mathbf{r}(t) = 6 \sin(2t) \mathbf{i} + 6 \cos(2t) \mathbf{j} + 5t \mathbf{k}$$

Βρείτε

- (α) Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα
- (β) Το μήκος της καμπύλης για  $0 \leq t \leq \pi$

**Άσκηση 71** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int [(3t^2 + 2t)\mathbf{i} + (3t - 6)\mathbf{j} + (6t^3 + 5t^2 - 4)\mathbf{k}] dt$$

[Homework]

**Άσκηση 72** Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης

$$\mathbf{r}(t) = (3t - 2)\mathbf{i} + (4t + 5)\mathbf{j}$$

Βρείτε

[Homework]

**Άσκηση 73** [Thomas §13.2, ασκ. 12] Επιλύστε το παρακάτω Π.Α.Τ. (Πρόβλημα Αρχικών Τιμών)

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (180t)\mathbf{i} + (180t - 16t^2)\mathbf{j} \\ \mathbf{r}(0) = 100\mathbf{j} \end{cases}$$

**Άσκηση 74** Μια μύγα κάθετα σε ένα τοίχο στο σημείο  $(0, 1, 3)$ . Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  αρχίζει να πετάει. Το διάνυσμα της ταχύτητας της, κάθε χρονική στιγμή  $t$  είναι

$$\mathbf{u}(t) = \cos(2t)\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + \sin(t)\mathbf{k}$$

Βρείτε τη θέση της μύγας την χρονική στιγμή  $t$ .

[Homework]



**Άσκηση 75** [Thomas §11.3, ασκ. 7] Βρείτε τις πολικές συντεταγμένες  $0 \leq \theta < 2\pi$  και  $r \geq 0$  των ακόλουθων σημείων που δίνονται σε καρτεσιανές.

(α)  $(1, 1)$     (β)  $(-3, 0)$     (γ) [Homework]  $(\sqrt{3}, -1)$     (δ) [Homework]  $(-3, 4)$

**Άσκηση 76** Βρείτε τις καρτεσιανές συντεταγμένες των ακόλουθων σημείων (που δίνονται σε πολικές).

(α)  $(3, \frac{\pi}{3})$     (β) [Homework]  $(2, 3\frac{\pi}{2})$     (γ) [Homework]  $(6, -5\frac{\pi}{6})$

**Άσκηση 77** Τοποθετήστε τα ακόλουθα σημεία στο πολικό επίπεδο

$$A\left(2, \frac{\pi}{4}\right), \quad B\left(-3, 2\frac{\pi}{3}\right), \quad C\left(4, 5\frac{\pi}{4}\right)$$

**Άσκηση 78** Σχεδιάστε την καμπύλη που ορίζεται από την εξίσωση

$$r = 4 \sin \theta$$

στο καρτεσιανό επίπεδο.

**Άσκηση 79** Αντικαταστήστε τις ακόλουθες πολικές εξισώσεις με ισοδύναμες καρτεσιανές και βρείτε/περιγράψτε τις γραφικές παραστάσεις τους στο καρτεσιανό επίπεδο

(α)  $\theta = \frac{\pi}{3}$     (β)  $r = 3$     (γ)  $r = 6 \cos \theta - 8 \sin \theta$

**Άσκηση 80** [Thomas §11.3, ασκ. 53-58] Αντικαταστήστε τις ακόλουθες καρτεσιανές εξισώσεις με ισοδύναμες πολικές.

- (α)  $x = 7$     (β)  $y = 1$     (γ)  $x = y$     (δ) [Homework]  $x - y = 3$     (ε) [Homework]  $x^2 + y^2 = 4$     (στ)  $x^2 - y^2 = 1$

**Άσκηση 81** [Thomas §11.4, ασκ. παρ. 1] Σχεδιάστε την καμπύλη

$$r = 1 - \cos \theta$$

στο καρτεσιανό επίπεδο [καρδιοειδής καμπύλη].

**Άσκηση 82** [Thomas §11.4, ασκ. παρ. 1] Σχεδιάστε την καμπύλη

$$r = 1 + \sin \theta$$

στο καρτεσιανό επίπεδο [καρδιοειδής καμπύλη].

[Homework]

**Άσκηση 83** [Thomas §11.3, ασκ. 11-15,26,25,24] Παραστήστε γραφικά τα σύνολα των σημείων των οποίων οι πολικές συντεταγμένες ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις.

- (α)  $r = 2$     (β)  $0 \leq r \leq 2$     (γ)  $r \geq 1$     (δ)  $1 \leq r \leq 2$     (ε)  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, r \geq 0$     (στ)  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq |r| \leq 2$     (ζ)  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 1 \leq |r| \leq 2$     (η)  $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, -1 \leq |r| \leq 1$

Polar plotter: <https://www.desmos.com/calculator>



**Άσκηση 84** Υπολογίστε, ανά δυο, τα εξωτερικά γινόμενα των τριών βασικών μοναδιαίων διανυσμάτων,  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  και  $\vec{k}$ . Επίσης υπολογίστε και το

$$\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{k}).$$

**Άσκηση 85** Σχησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου, υπολογίστε το

$$(2\vec{i} \times 3\vec{j}) \times \vec{j}$$

**Άσκηση 86** Υπολογίστε τα παρακάτω εξωτερικά γινόμενα.

(α)  $\vec{a} \times \vec{b}$

(β)  $\vec{x} \times \vec{y}$

όπου  $\vec{a} = \langle -1, 2, 5 \rangle$ ,  $\vec{b} = \langle 4, 0, -3 \rangle$ ,  $\vec{x} = \langle 1, 2, 3 \rangle$  και  $\vec{y} = \langle 3, 2, 1 \rangle$

**Άσκηση 87** Υπολογίστε το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές τα σημεία  $P(1, 0, 0)$ ,  $Q(0, 1, 0)$  και  $R(0, 0, 1)$ .

**Άσκηση 88** Έστω τα μη συνευθειακά σημεία  $P(9, -3, -2)$ ,  $Q(1, 3, 0)$  και  $R(-2, 5, 0)$ . Βρείτε ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που περιέχει τα τρία σημεία. Βρείτε και ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο παραπάνω επίπεδο.

**[Homework]**

**Άσκηση 89** Έστω τα μη συνευθειακά σημεία  $P(1, 1, -2)$ ,  $Q(0, 2, 1)$  και  $R(-1, -1, 0)$ . Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περιέχει αυτά τα σημεία.



**Άσκηση 90** [Thomas §12.5, ασκ. 22] Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που διέρχεται από το σημείο  $P(1, -1, 3)$  και είναι παράλληλο στο επίπεδο

$$3x + y + z = 7$$

**Άσκηση 91** Για κάθε ζεύγος επιπέδων ελέγξτε αν είναι παράλληλα. Αν όχι βρείτε την μεταξύ τους γωνία.

(α')  $\Pi_1 : x + 2y - z = 8, \quad \Pi_2 : 2x + 4y - 2z = 10$

(β')  $\Pi_3 : 2x - 3y + 2z = 3, \quad \Pi_4 : 6x + 2y - 3z = 1$

(γ')  $\Pi_5 : x + y + z = 4, \quad \Pi_6 : x - 3y + 5z = 1$



**Άσκηση 92** [Thomas §14.1, ασκ. 6,7, +++] Βρείτε και σχεδιάστε το Π.Ο. κάθε μιας απο τις παρακάτω συναρτήσεις

$$(\alpha') f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$$

$$(\beta') g(x, y) = \frac{(x-1)(y+2)}{(y-x)(y-x^3)}$$

$$(\gamma') h(x, y, z) = \frac{(3x-4y+2z)}{\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}}$$

**Άσκηση 93** [Thomas §14.2, ασκ. 7,30,17] Βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια

$$(i) \lim_{(x,y) \rightarrow (0, \ln 2)} e^{x-y}$$

$$(ii) \text{ [Homework] } \lim_{(x,y,z) \rightarrow (2,-3,6)} \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$(iii) \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \neq y}} \frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

**Άσκηση 94** [Thomas §14.2, ασκ. 45] Θεωρώντας διαφορετικές διαδρομές προσέγγισης, δείξτε ότι η συνάρτηση

$$g(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$$

δεν έχει όριο καθώς το  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

**Άσκηση 95** [Thomas §14.3, ασκ. 36] Βρείτε την μερική παράγωγο της συνάρτησης

$$g(x, y) = y^2 e^{\frac{2x}{y}}$$

ως προς κάθε μεταβλητή.

**Άσκηση 96** [Thomas §14.3, ασκ. 56] Επαληθεύστε ότι

$$w_{xy} = w_{yx}$$

για

(α')  $w = e^x + x \ln y + y \ln x$

(β') **[Homework]**  $w = \frac{x^2}{y^3}$

**Άσκηση 97** [Thomas §14.2, ασκ. 75] Βρείτε την τιμή της  $\frac{\partial z}{\partial x}$  στο σημείο  $(1, 1, 1)$  αν η εξίσωση

$$xy + z^3x - 2yz = 0$$

ορίζει το  $z$  συναρτήσει των δυο ανεξάρτητων μεταβλητών  $x$  και  $y$  και η ζητούμενη μερική παράγωγος υπάρχει.

**Άσκηση 98** [Thomas §14.3, ασκ. 76] Βρείτε την τιμή της  $\frac{\partial x}{\partial z}$  στο σημείο  $(1, -1, 3)$  αν η εξίσωση

$$xy + y \ln x - x + 4 = 0$$

ορίζει το  $x$  συναρτήσει των δυο ανεξάρτητων μεταβλητών  $y$  και  $z$  και η ζητούμενη μερική παράγωγος υπάρχει.

**[Homework]**

**Άσκηση 99** [Thomas §14.5, ασκ. 7,8] Βρείτε το  $\nabla f$  στο σημείο  $(1, 1, 1)$  για

(α')  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + z \ln x$

(β') **[Homework]**  $f(x, y, z) = 2z^3 - 3(x^2 + y^2)z + \tan^{-1}(xz)$

**Άσκηση 100** [Thomas §14.5, ασκ. 11,16] Βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης  $f$  στο  $P_0$  στην κατεύθυνση του διανύσματος  $\vec{A}$ .

(α')  $f(x, y) = 2xy - 3y^2, P_0(5, 5), \vec{A} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

(β') **[Homework]**  $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2, P_0(1, 1, 1), \vec{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

**Άσκηση 101** [Thomas §14.2, ασκ. ] Ένας σκιέρ είναι σε ένα βουνό που περιγράφεται από την εξίσωση

$$z = 100 - 0.4x^2 - 0.3y^2$$

Το  $z$  δηλώνει το ύψος. Ο σκιέρ βρίσκεται στο σημείο με  $xy$  συντεταγμένες  $(1, 1)$  και θέλει να κατέβει όσο το δυνατόν γρηγορότερα. Προς ποια κατεύθυνση πρέπει να κινηθεί;



**Άσκηση 102** Βρείτε τα τοπικά ακρότατα, αν υπάρχουν, της συνάρτησης

$$f(x, y) = 4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 24$$

**Άσκηση 103** Βρείτε τα τοπικά ακρότατα, αν υπάρχουν, της συνάρτησης

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + y^2 + 2xy - 6x - 3y + 4$$

**Άσκηση 104** [Thomas §14.7, ασκ. 58]

Από όλα τα κλειστά ορθογώνια παραλληλεπίπεδα κουτιά, όγκου  $27 \text{ cm}^3$  ποιο έχει το ελάχιστο εμβαδόν επιφανείας;

**Άσκηση 105** [Thomas §14.7, ασκ. 61]

Βρείτε το πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων σημείο του γραφήματος της

$$y^2 - xz^2 = 4$$

**Άσκηση 106**

Βρείτε τα σημεία πάνω στην έλλειψη

$$x^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

όπου η

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2$$

εμφανίζει ακρότατα.

[Homework]



**Άσκηση 107**

Υπολογίστε το παρακάτω ολοκλήρωμα.

$$\iint_D e^{x^2+y^2} dA,$$

όπου  $D$  είναι το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.

**Άσκηση 108** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iint_D 2xy dA,$$

όπου  $D$  είναι η περιοχή μεταξύ των κύκλων με ακτίνες 2 και 5, που βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.

**Άσκηση 109**

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα.

$$I = \iint_R 3x dx dy,$$

όπου  $R$  είναι το χωρίο

$$R = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

**[Homework]**

**Άσκηση 110**

Ολοκληρώστε τη συνάρτηση

$$f(x, y) = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

στο χωρίο  $1 \leq x^2 + y^2 \leq e$ .

**Άσκηση 111** [Thomas §15.4, ασκ. 12]

Μετατρέψτε το καρτεσιανό ολοκλήρωμα σε ισοδύναμο πολικό. Έπειτα υπολογίστε το πολικό.

$$I = \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx$$

**Άσκηση 112** Υπολογίστε το ολοκλήρωμα.

$$I = \iint_R (x + y) dA,$$

όπου  $R$  είναι το χωρίο

$$R = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}.$$

**Άσκηση 113** [Thomas §15.4, ασκ. 14]

Μετατρέψτε το παρακάτω καρτεσιανό ολοκλήρωμα σε ισοδύναμο πολικό. Έπειτα υπολογίστε το πολικό.

$$I = \int_0^2 \int_0^x dy dx$$

**Άσκηση 114** [Thomas §15.4, ασκ. 19]

Μετατρέψτε το παρακάτω καρτεσιανό ολοκλήρωμα σε ισοδύναμο πολικό. Έπειτα υπολογίστε το πολικό.

$$I = \int_0^{\ln 2} \int_0^{\sqrt{(\ln 2)^2 - y^2}} e^{\sqrt{x^2 + y^2}} dy dx$$

[Homework]

**Άσκηση 115** Να υπολογίσετε το παρακάτω ολοκλήρωμα

$$I = \iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy,$$

όταν  $D$  είναι το επίπεδο χωρίο του  $\mathbb{R}^2$  που περιορίζεται από τις ανισότητες

$$x \leq y, \quad x^2 + y^2 \leq 2, \quad x^2 + y^2 \geq 1$$

[Homework]

**Άσκηση 116** Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την

$$r = 1 - \sin \theta.$$

**Άσκηση 117**

Υπολογίστε το

$$I = \iint_D x \, dA,$$

όπου  $D$  είναι η περιοχή του πρώτου τεταρτημόριου που περικλείεται από τις καμπύλες  $x^2 + y^2 = 4$  και  $x^2 + y^2 = 2x$ .

[Homework]



- Άσκηση 55 από set 3
- Άσκηση 58 από set 3
- Άσκηση 64 από set 3
- Άσκηση 90 από set 6
- Άσκηση 91 από set 6
- Άσκηση 98 από set 7
- Άσκηση 100β' από set 7

**Άσκηση 118**

Υπολογίστε το

$$I = \iint_R x \, dA,$$

όπου  $R$  είναι η περιοχή που φράσσεται από τους άξονες και την  $2y + x = 2$ .

**Άσκηση 119** [Thomas §15.2, ασκ. 51] Υπολογίστε το

$$I = \int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{2x} \, dx dy.$$

Σχεδιάστε το χωρίο ολοκλήρωσης, αντιστρέψτε τη σειρά ολοκλήρωσης και υπολογίστε το νέο ολοκλήρωμα.

**Άσκηση 120**

Έστω το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_R x \, dA,$$

όπου  $R$  είναι η περιοχή που φράσσεται από τις παραβολές  $y = 3x^2$  και  $y = 16 - x^2$ . [Υπόδειξη: Δεν είναι ανάγκη να υπολογίσετε το τελευταίο ολοκλήρωμα που θα εμφανιστεί  $\int_{*}^{*} (256x^2 - 8x^6 - 32x^4) \, dx$ ]

