

Άσκηση 1 Βρείτε τους όρους a_1, a_2, a_3, a_4 για την ακολουθία

$$a_n = \frac{1}{(n-1)!}$$

Άσκηση 2 Γράψτε τους 6 πρώτους όρους της ακολουθίας

$$a_1 = 2, \text{ και } a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} a_n}{2} \text{ για } n > 1$$

Άσκηση 3 Βρείτε τύπο για το n -οστό όρο της ακολουθίας

$$\left\{ +1, -\frac{1}{4}, +\frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, +\frac{1}{25}, \dots \right\}$$

Άσκηση 4 Δώστε τον ορισμό της αποκλίνουσας ακολουθίας στο $-\infty$.

Άσκηση 5 Συμπληρώστε τα κενά στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1 (Ιδιότητες ορίων ακολουθιών) Έστω a_n και b_n ακολουθίες πραγματικών αριθμών και A και B πραγματικοί αριθμοί. Έστω $a_n \rightarrow A$ και $b_n \rightarrow B$. Ισχύουν τότε οι ακόλουθες ιδιότητες:

Όριο αθροίσματος: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \underline{\hspace{2cm}}$

Όριο Διαφοράς: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \underline{\hspace{2cm}}$

Όριο γινομένου: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \underline{\hspace{2cm}}$

Όριο σταθερού πολλαπλασίου: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot b_n) = \underline{\hspace{2cm}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Όριο πηλίκου: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$, $B \neq 0$

Άσκηση 6 Βρείτε, αν συγκλίνει, το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \frac{-1}{n}$$

Άσκηση 7 Βρείτε, αν συγκλίνει, το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \frac{n-1}{n}$$

Άσκηση 8

Βρείτε, αν συγκλίνει, το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \frac{5}{n^2}$$

Άσκηση 9 Βρείτε, αν συγκλίνει, το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \frac{1-5n^4}{n^4+8n^3}$$

Άσκηση 10 Βρείτε, αν συγκλίνει, το όριο της ακολουθίας

$$a_n = 1 + (-1)^n$$

Άσκηση 11

Συμπληρώστε τα κενά στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2 (Θεώρημα σάντουιτς για ακολουθίες, squeeze principle) Έστω $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, και $\{c_n\}$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αν $a_n \leq b_n \leq c_n$ για κάθε n πέραν κάποιου N και αν $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$, τότε θα ισχύει επίσης $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

Επίσης προσπαθήστε να κάνετε ένα σχήμα.

Άσκηση 12

Δείξτε, με χρήση του Θεωρήματος σάντουιτς για ακολουθίες, ότι

$$\frac{\cos n}{n^2} \rightarrow 0$$

Άσκηση 13

Δείξτε, με χρήση του Θεωρήματος σάντουιτς για ακολουθίες, ότι

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$$

Άσκηση 14

Δείξτε, με χρήση του Θεωρήματος συνεχούς συνάρτησης για ακολουθίες, ότι

$$\cos \frac{3}{n^2} \rightarrow 1$$

Άσκηση 15

Δείξτε ότι

$$\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$$

Άσκηση 16

Συμπληρώστε (και μάθετε απ'έξω!) τα παρακάτω βασικά όρια

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \underline{\hspace{2cm}}$	2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \underline{\hspace{2cm}}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = \underline{\hspace{2cm}}, (c > 0)$	4. $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = \underline{\hspace{2cm}}, (c < 1)$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n = \underline{\hspace{2cm}}, c \in \mathbb{R}$	6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{n!} = \underline{\hspace{2cm}}$

Άσκηση 17 Βρείτε, αν υπάρχει, το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n^2}{n}$$

Άσκηση 18 Βρείτε, αν υπάρχει, το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2}$$

Άσκηση 19 Βρείτε, αν υπάρχει, το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Άσκηση 20 Βρείτε, αν υπάρχει, το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n}$$

Άσκηση 21 Βρείτε, αν υπάρχει, το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n$$

Άσκηση 22 Βρείτε, αν υπάρχει, το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100^n}{n!}$$

Άσκηση 23 [Thomas §10.1, ασκ. 45] Ελέγξτε αν η παρακάτω ακολουθία συγκλίνει ή αποκλίνει. Αν είναι συγκλίνουσα βρείτε το όριο της.

$$a_n = \frac{\sqrt{2n}}{n+1}$$

Άσκηση 24 [Thomas §10.1, ασκ. 51] Ελέγξτε αν η παρακάτω ακολουθία συγκλίνει ή αποκλίνει. Αν είναι συγκλίνουσα βρείτε το όριο της.

$$a_n = \frac{n}{2^n}$$

Άσκηση 25 [Thomas §10.1, ασκ. 55] Ελέγξτε αν η παρακάτω ακολουθία συγκλίνει ή αποκλίνει. Αν είναι συγκλίνουσα βρείτε το όριο της.

$$a_n = 8^{\frac{1}{n}}$$

Άσκηση 26 [Thomas §10.1, ασκ. 61] Ελέγξτε αν η παρακάτω ακολουθία συγκλίνει ή αποκλίνει. Αν είναι συγκλίνουσα βρείτε το όριο της.

$$a_n = \left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Άσκηση 27 [Thomas §10.1, ασκ. 67] Ελέγξτε αν η παρακάτω ακολουθία συγκλίνει ή αποκλίνει. Αν είναι συγκλίνουσα βρείτε το όριο της.

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

Άσκηση 28 Να δείξετε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+2}\right)^n = e^{-2}$$

Άσκηση 29 Να δείξετε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n-1}\right)^n = e^4$$