Άσκηση 1 *Έστω τα διανύσματα* $\vec{v} = (1,1,1)$ *και* $\vec{w} = (0,1,-1)$.

(i) *Βρείτε ένα διάνυσμα* $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ *που να είναι κάθετο στα* $\vec{v}$ *και* $\vec{w}$.

(ii) *Είναι το σύνολο* $\{\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}\}$ *ορθογώνιο;*

(iii) *Βρείτε σταθερές* a, b *και* c *τέτοιες ώστε το σύνολο* $\{a\vec{x}, b\vec{v}, c\vec{w}\}$ *να είναι ορθογώνιο.*

Άσκηση 2 *Οι πίνακες που "στρέφουν" το επίπεδο* x, y *είναι οι*

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

(i) *Επαληθεύστε την*

$$A(\theta_1) A(\theta_2) = A(\theta_1 + \theta_2)$$

(ii) *Υπολογίστε το γινόμενο*

$$A(\theta) A(-\theta) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3 *Έστω τα γραμμικά συστήματα:*

$$(\Sigma 1) \begin{cases} 0.835x + 0.667y = 0.168 \\ \\ 0.333x + 0.266y = 0.067 \end{cases}$$

και

$$(\Sigma 2) \begin{cases} 0.835x + 0.667y = 0.168 \\ \\ 0.333x + 0.266y = \boldsymbol{0.066} \end{cases}$$

(i) *Επιλύστε τα δυο συστήματα.*

(ii) *Αν θεωρήσουμε το (Σ1) ως*

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

και το (Σ2) ως ένα "διαταραγμένο" (Σ1)

$$A\left(\vec{x} + \delta\vec{x}\right) = \left(\vec{b} + \delta\vec{b}\right)$$

υπολογίστε τα $\|\delta\vec{b}\|_1$ *και* $\|\delta\vec{x}\|_1$.

(iii) *Εξηγείστε πως μια τόσο μικρή μεταβολή στο δεξί μέλος επέφερε τόση μεγάλη μεταβολή στην λύση.*

Άσκηση 4 *Για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα στήλης* $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ *ο πίνακας*

$$Q = I - \frac{2}{\vec{u}^T\vec{u}}\vec{u}\vec{u}^T$$

καλειται μετασχηματισμός του Householder.

(i) *Να αποδείξετε ότι ο πίνακας Q είναι συμμετρικός και ορθογώνιος.*

(ii) *Έστω $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\vec{x} = [x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n]^T \neq 0$. Εάν $\vec{u} = \vec{x} + a\vec{e_1}$, με $a = \pm \|\vec{x}\|_2$, να αποδείξετε ότι*

$$P\vec{x} = \vec{x} - \vec{u}.$$

Άσκηση 5 *Δίνεται ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 0 & -7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Να βρεθούν οι $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ και $\|A\|_F$.