Άσκηση 1 *Έστω το γραμμικό σύστημα* $A\vec{x} = \vec{b}$ *με*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -12 & -3 & 8 \\ -4 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ -21 \\ -7 \\ -25 \end{bmatrix} \tag{1}$$

(i) *Εφαρμόζοντας την απλή απαλοιφή Gauss, βρείτε τον άνω τριγωνικό πίνακα* U *και το δεξί μέλος* $\vec{c}$. *Δηλαδή ξεκινώντας από τον επαυξημένο πίνακα* $[A \mid \vec{b}]$ *καταλήξτε στον* $[U \mid \vec{c}]$.

(ii) *Κάνοντας προς τα πίσω αντικατάσταση, στο σύστημα* $U\vec{x} = \vec{c}$, *βρείτε την λύση* $\vec{x}$.

Άσκηση 2 *Έστω το γραμμικό σύστημα* $A\vec{x} = \vec{b}$ *με* A, b

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -12 & -3 & 8 \\ -4 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ -21 \\ -7 \\ -25 \end{bmatrix}$$

[Το ίδιο σύστημα όπως στην άσκηση (1)].

1. *Βρείτε τους πίνακες* L *και* U *που προκύπτουν από την παραγοντοποίηση* LU *(χωρίς οδήγηση) του πίνακα* A.
2. *Κάνοντας πολλαπλασιασμό πινάκων επαληθεύστε ότι* $A = LU$.
3. *Υπολογίστε την λύση του συστήματος* $A\vec{x} = \vec{b}$ *χρησιμοποιώντας την παραπάνω παραγοντοποίηση* LU *(λύνοντας 2 τριγωνικά συστήματα).*
4. *Παρατηρείστε τις ομοιότητες με την προηγούμενη άσκηση (απλή απαλοιφή Gauss με απλή LU).*

Άσκηση 3 *Έστω ο συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 29 & 36 & 43 \\ 3 & 36 & 109 & 126 \\ 4 & 43 & 126 & 246 \end{bmatrix}$$

και το διάνυσμα στήλης

$$\vec{b} = [5,\ 45,\ 129,\ 250]^T$$

(α) *Βρείτε τον κάτω τριγωνικό πίνακα* L *που προκύπτει από την παραγοντοποίηση Cholesky* ($A = LL^T$).

(β) *Υπολογίστε την λύση του συστήματος* $A\vec{x} = \vec{b}$ *χρησιμοποιώντας την παραπάνω παραγοντοποίηση* LL^T *(λύνοντας 2 τριγωνικά συστήματα).*

Άσκηση 4 (Για εξάσκηση) *Έστω το γραμμικό σύστημα* $A\vec{x} = \vec{b}$ *με*

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 9 & -2 & 1 \\ 15 & 6 & 12 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 27 \\ 45 \end{bmatrix}$$

1. *Βρείτε τους πίνακες L και U που προκύπτουν από την παραγοντοποίηση LU (χωρίς οδήγηση) του πίνακα A.*

2. *Κάνοντας πολλαπλασιασμό πινάκων επαληθεύστε ότι $A = LU$.*

3. *Υπολογίστε την λύση του συστήματος $A\vec{x} = \vec{b}$ χρησιμοποιώντας την παραπάνω παραγοντοποίηση LU (λύνοντας 2 τριγωνικά συστήματα).*

4. *Επαληθεύστε την λύση (αντικαθιστώντας την στο αρχικό σύστημα).*