

**Άσκηση 1** [ap37] Έστω πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

- (i) Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα  $A$ . Είναι ο πίνακας αντιστρέψιμος;
- (ii) Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο,  $p_A(\lambda)$ , του πίνακα  $A$ .
- (iii) Βρείτε τον  $A^{-1}$  χρησιμοποιώντας το θεώρημα Caley-Hamilton.
- (iv) Βρείτε τον  $A^{-1}$  χρησιμοποιώντας την μέθοδο Gauss-Jordan.

**Άσκηση 2** [ap22] Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (i) Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο,  $p_A(\lambda)$ , του πίνακα  $A$
- (ii) Βρείτε τις ιδιοτιμές και την ορίζουσα του πίνακα  $A$ . Επαληθεύστε ότι το άθροισμα των ιδιοτιμών ισούται με το ίχνος του  $A$ .
- (iii) Χωρίς περαιτέρω πράξεις μπορούμε να αποφανθούμε για το αν ο πίνακας  $A$  είναι διαγωνοποιήσιμος ;
- (iv) Για κάθε διακριτή ιδιοτιμή  $\lambda$  βρείτε την διάσταση και μια βάση του  $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ .
- (v) Για κάθε διακριτή ιδιοτιμή  $\lambda$  βρείτε  $m$  γραμμικώς ανεξάρτητα ιδοδιανύσματα, όπου  $m$  η διάσταση του  $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ . (Αν  $m=1$  βρείτε ένα ιδιοδιάνυσμα.)
- (vi) Εξετάστε αν ο πίνακας  $A$  είναι διαγωνοποιήσιμος. Αν είναι βρείτε τους πίνακες που τον διαγωνοποιούν. (Βρείτε και τους τρεις πίνακες  $S, \Lambda, S^{-1}$ )
- (vii) Αν ο πίνακας  $A$  είναι διαγωνοποιήσιμος, βρείτε τις ιδιοτιμές, και την ορίζουσα του  $A^{100}$  καθώς και τον ίδιο τον πίνακα  $A^{100}$ .

**Άσκηση 3** [ap23] Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (i) Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο,  $p_A(\lambda)$ , του πίνακα  $A$
- (ii) Βρείτε τις ιδιοτιμές και την ορίζουσα του πίνακα  $A$ .
- (iii) Χωρίς περαιτέρω πράξεις μπορούμε να αποφανθούμε για το αν ο πίνακας  $A$  είναι διαγωνοποιήσιμος ;
- (iv) Για κάθε διακριτή ιδιοτιμή  $\lambda$  βρείτε την διάσταση και μια βάση του  $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ .
- (v) Για κάθε διακριτή ιδιοτιμή  $\lambda$  βρείτε  $m$  γραμμικώς ανεξάρτητα ιδοδιανύσματα, όπου  $m$  η διάσταση του  $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ . (Αν  $m=1$  βρείτε ένα ιδιοδιάνυσμα.)
- (vi) Εξετάστε αν ο πίνακας  $A$  είναι διαγωνοποιήσιμος. Αν είναι βρείτε τους πίνακες που τον διαγωνοποιούν.
- (vii) Χρησιμοποιώντας μόνο την πληροφορία των ιδιοτιμών του  $A$  (δηλαδή υποθέστε ότι γνωρίζετε μόνο τις ιδιοτιμές του πίνακα και όχι τον ίδιο τον πίνακα) βρείτε τις ιδιοτιμές και την ορίζουσα των  $A^T$  και  $A^{-1}$  καθώς και τις ιδιοτιμές του πίνακα  $B = A - 3I$ .