Άσκηση 1 *Έστω το γραμμικό σύστημα:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -9 \\ 7x_1 - 5x_2 + 5x_3 = -53 \\ 9x_1 - 6x_2 + 2x_3 = -74 \end{cases}.$$

(i) *Γράψτε σε μορφή πινάκων ($A\vec{x} = \vec{b}$) το παραπάνω γραμμικό σύστημα.*

(ii) *Εφαρμόζοντας την απλή απαλοιφή Gauss, βρείτε τον άνω τριγωνικό πίνακα U και το δεξί μέλος $\vec{c}$. Δηλαδή ξεκινώντας από τον επαυξημένο πίνακα $[A \mid \vec{b}]$ καταλήξτε στον $[U \mid \vec{c}]$.*

(iii) *Κάνοντας προς τα πίσω αντικατάσταση, στο σύστημα $U\vec{x} = \vec{c}$, βρείτε την λύση $\vec{x}$.*

(iv) *Επαληθεύστε την λύση (αντικαθιστώντας την στο αρχικό σύστημα).*

Άσκηση 2 *Έστω το γραμμικό σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ με*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 4 & 6 & -3 \\ 9 & 7 & -5 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 26 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(i) *Εφαρμόζοντας την απλή απαλοιφή Gauss, βρείτε τον άνω τριγωνικό πίνακα U και το δεξί μέλος $\vec{c}$. Δηλαδή ξεκινώντας από τον επαυξημένο πίνακα $[A \mid \vec{b}]$ καταλήξτε στον $[U \mid \vec{c}]$.*

(ii) *Κάνοντας προς τα πίσω αντικατάσταση, στο σύστημα $U\vec{x} = \vec{c}$, βρείτε την λύση $\vec{x}$.*

(iii) *Επαληθεύστε την λύση (χρησιμοποιώντας Matlab ή Octave ή Freemat).*

Άσκηση 3 *Έστω το γραμμικό σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ με*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & -6 & 0 & 1 \\ -2 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(i) *Εφαρμόζοντας την απλή απαλοιφή Gauss, βρείτε τον άνω τριγωνικό πίνακα U και το δεξί μέλος $\vec{c}$. Δηλαδή ξεκινώντας από τον επαυξημένο πίνακα $[A \mid \vec{b}]$ καταλήξτε στον $[U \mid \vec{c}]$.*

(ii) *Κάνοντας προς τα πίσω αντικατάσταση, στο σύστημα $U\vec{x} = \vec{c}$, βρείτε την λύση $\vec{x}$.*

Άσκηση 4 *Έστω το γραμμικό σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ με*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(i) *Εφαρμόζοντας την απλή απαλοιφή Gauss, βρείτε τον άνω τριγωνικό πίνακα U και το δεξί μέλος $\vec{c}$. Δηλαδή ξεκινώντας από τον επαυξημένο πίνακα $[A \mid \vec{b}]$ καταλήξτε στον $[U \mid \vec{c}]$.*

(ii) *Κάνοντας προς τα πίσω αντικατάσταση, στο σύστημα $U\vec{x} = \vec{c}$, επιλύστε το αρχικό σύστημα.*

Άσκηση 5 *Έστω το γραμμικό σύστημα* $A\vec{x} = \vec{b}$ *με*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -12 & -3 & 8 \\ -4 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \textit{ και } \vec{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ -21 \\ -7 \\ -25 \end{bmatrix} \tag{1}$$

(i) *Εφαρμόζοντας την απλή απαλοιφή Gauss, βρείτε τον άνω τριγωνικό πίνακα* U *και το δεξί μέλος* $\vec{c}$. *Δηλαδή ξεκινώντας από τον επαυξημένο πίνακα* $[A \mid \vec{b}]$ *καταλήξτε στον* $[U \mid \vec{c}]$.

(ii) *Κάνοντας προς τα πίσω αντικατάσταση, στο σύστημα* $U\vec{x} = \vec{c}$, *βρείτε την λύση* $\vec{x}$.

Άσκηση 6 *Έστω το γραμμικό σύστημα* $A\vec{x} = \vec{b}$ *με* A, b

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -12 & -3 & 8 \\ -4 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \textit{ και } \vec{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ -21 \\ -7 \\ -25 \end{bmatrix}$$

[Το ίδιο σύστημα όπως στην άσκηση (5)].

1. *Βρείτε τους πίνακες* L *και* U *που προκύπτουν από την παραγοντοποίηση* LU *(χωρίς οδήγηση) του πίνακα* A.
2. *Κάνοντας πολλαπλασιασμό πινάκων επαληθεύστε ότι* $A = LU$.
3. *Υπολογίστε την λύση του συστήματος* $A\vec{x} = \vec{b}$ *χρησιμοποιώντας την παραπάνω παραγοντοποίηση* LU *(λύνοντας 2 τριγωνικά συστήματα).*
4. *Παρατηρείστε τις ομοιότητες με την προηγούμενη άσκηση (απλή απαλοιφή Gauss με απλή LU).*