

Άσκηση 1 [ap34] Να βρεθεί, αν υπάρχει, ο αντίστροφος του παρακάτω πίνακα A με την μέθοδο Gauss-Jordan.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Άσκηση 2 [ap18] Έστω το γραμμικό σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ με

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 6 & 7 & 8 & -5 \\ -8 & -4 & -9 & 3 \\ 0 & 16 & -13 & -1 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{b} = \begin{bmatrix} 13 \\ 47 \\ -49 \\ 35 \end{bmatrix}$$

(i) Να γίνει η διάσπαση LU του πίνακα A με μερική οδήγηση. Δηλαδή βρείτε ένα κάτω τριγωνικό πίνακα L με μονάδες στην διαγώνιο, ένα τετραγωνικό μεταθετικό πίνακα P και ένα άνω τριγωνικό πίνακα U τέτοιους ώστε να ισχύει

$$PA = LU.$$

(ii) Κάνοντας πολλαπλασιασμό πινάκων επαληθεύστε ότι $PA = LU$.

(iii) Υπολογίστε την λύση του συστήματος $A\vec{x} = \vec{b}$ χρησιμοποιώντας την παραπάνω παραγοντοποίηση LU (λύνοντας 2 τριγωνικά συστήματα).

(iv) Επαληθεύστε την λύση (αντικαθιστώντας την στο αρχικό σύστημα).

Άσκηση 3 [ap35] Έστω A ο (μή τετραγωνικός) πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 9 & 5 & 4 \\ -1 & -3 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 15 & 7 & 12 \end{bmatrix}.$$

(i) Να γίνει η διάσπαση LU του πίνακα A με μερική οδήγηση. Δηλαδή βρείτε ένα κάτω τριγωνικό πίνακα L με μονάδες στην διαγώνιο, ένα τετραγωνικό μεταθετικό πίνακα P και ένα άνω τριγωνικό πίνακα U τέτοιους ώστε να ισχύει

$$PA = LU.$$

(ii) Ποιοί είναι οι οδηγοί, ποιές είναι οι στήλες οδήγησης, ποιά είναι η τάξη του πίνακα A , ποιές είναι οι βασικές μεταβλητές και ποιές οι ελεύθερες μεταβλητές;

(iii) Χρησιμοποιώντας τους πίνακες P , L και U βρείτε, αν υπάρχει, την λύση του γραμμικού συστήματος $A\vec{x} = \vec{b}$ όπου $\vec{b} = [1 \ 2 \ 3 \ 4]^T$ και γράψτε την στην μορφή

$$\vec{x}_{γενική} = \vec{x}_{ειδική} + \vec{x}_{ομογενούς}$$

(iv) Χρησιμοποιώντας τους πίνακες P , L και U βρείτε, αν υπάρχει, την λύση του γραμμικού συστήματος $Ax = b$ όπου $b = [\frac{13}{10} \ 1 \ \frac{1}{2} \ \frac{14}{5}]^T$ και γράψτε την στην μορφή

$$\vec{x}_{γενική} = \vec{x}_{ειδική} + \vec{x}_{ομογενούς}$$

Άσκηση 4 [ap36] Έστω το (υπερκαθορισμένο) γραμμικό σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ με

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & 6 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

(i) Να γίνει η διάσπαση LU του πίνακα A με μερική οδήγηση. Δηλαδή βρείτε ένα κάτω τριγωνικό πίνακα L με μονάδες στην διαγώνιο, ένα τετραγωνικό μεταθετικό πίνακα P και ένα άνω τριγωνικό πίνακα U τέτοιους ώστε να ισχύει

$$PA = LU.$$

(ii) Ποιοί είναι οι οδηγοί, ποιές είναι οι στήλες οδήγησης, ποιά είναι η τάξη του πίνακα A, ποιές είναι οι βασικές μεταβλητές και ποιές οι ελεύθερες μεταβλητές;

(iii) Χρησιμοποιώντας τους πίνακες P, L και U βρείτε, αν υπάρχει, την λύση του γραμμικού συστήματος και γράψτε την στην μορφή

$$\vec{x}_{γενική} = \vec{x}_{ειδική} + \vec{x}_{ομογενούς}$$