Άσκηση 1 [ap20] *Έστω ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & -1 & -4 \\ 4 & -2 & 1 & 6 & 1 \end{bmatrix},$$

(i) *Να γίνει η διάσπαση LU του πίνακα A με μερική οδήγηση. Δηλαδή βρείτε ένα κάτω τριγωνικό πίνακα L με μονάδες στην διαγώνιο, ένα τετραγωνικό μεταθετικό πίνακα P και ένα άνω τριγωνικό πίνακα U τέτοιους ώστε να ισχύει*

$$PA = LU.$$

(ii) *Να υπολογιστεί η τάξη του πίνακα A καθώς και οι διαστάσεις των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων του A. (Χώρου στηλών $R(A)$, χώρου γραμμών $R(A^{\mathrm{T}})$, μηδενόχωρου $N(A)$ και του αριστερού μηδενόχωρου $N(A^T)$.*

(iii) *Να βρεθούν βάσεις των παραπάνω υποχώρων.*

(iv) *Να λυθεί το γραμμικό σύστημα*

$$Ax = b,$$

χρησιμοποιώντας την παραπάνω ανάλυση LU για

$$b = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

(v) *Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ της λύσης του συστήματος και της βάσης του μηδενόχωρου.;*

Άσκηση 2 [ap45] *Έστω U ο κλιμακωτός πίνακας που έχει προκύψει μετά την απαλοιφή Gauss ενός πίνακα A. Είναι σωστό ότι $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(U)$; Αν ναι αποδείξτε το αν όχι βρείτε ένα αντιπαράδειγμα.*

Άσκηση 3 [ap21] *Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις εξετάστε αν τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα ή γραμμικά εξαρτημένα.*

i. $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_4} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ii. $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_4} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

iii. $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v_4} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_5} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 4 [ap43] *Αν τα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^7$ να δείξετε ότι και τα*

$$\vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w}, 4\vec{u} + 5\vec{v} + 6\vec{w}, \vec{u} + \vec{w}$$

είναι γραμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του ίδιου χώρου.

Άσκηση 5 [ap44] *Απαντήστε τις παρακάτω ερωτήσεις.*

i. *Έστω διάνυσμα $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$. Αυτό μόνο του είναι γραμμικώς ανεξάρτητο ή γραμμικώς εξαρτημένο;*

ii. *Έστω το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$. Αυτό μόνο του είναι γραμμικώς ανεξάρτητο ή γραμμικώς εξαρτημένο;*

iii. *Αν ένα από τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_N$ είναι το μηδενικό τότε τα παραπάνω διανύσματα είναι γρ. εξαρτημένα ή γρ. ανεξάρτητα;*

iv. *Αν σε ένα πλήθος γραμμικώς εξαρτημένων διανυσμάτων βάλουμε και άλλα διανύσματα, τότε όλα μαζί θα είναι και πάλι γραμμικώς εξαρτημένα;*

v. *Αν από ένα πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων βγάλουμε κάποια από αυτά τότε όσα μένουν είναι και πάλι γραμμικώς ανεξάρτητα;*

vi. *Αν τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι γραμμικά εξαρτημένα τότε κάθε ένα από αυτά μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων;*

vii. *Αν τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε κανένα από αυτά δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων;*