Άσκηση 1

[ap26] *Οι πίνακες που "στρέφουν" το επίπεδο* x, y *είναι οι*

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

(i) *Επαληθεύστε την*

$$A(\theta_1) A(\theta_2) = A(\theta_1 + \theta_2)$$

(ii) *Υπολογίστε το γινόμενο*

$$A(\theta) A(-\theta) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(iii) *Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία.*

Άσκηση 2

[ap25] *Έστω τα διανύσματα* $\vec{v} = (1, 1, 1)$ *και* $\vec{w} = (0, 1, -1)$.

(i) *Βρείτε ένα διάνυσμα* $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \neq \vec{0}$ *που να είναι κάθετο στα* $\vec{v}$ *και* $\vec{w}$.

(ii) *Είναι το σύνολο* $\{\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}\}$ *ορθογώνιο;*

(iii) *Βρείτε σταθερές* a, b *και* c *τέτοιες ώστε το σύνολο* $\{a\vec{x}, b\vec{v}, c\vec{w}\}$ *να είναι ορθοκανονικό.*

Άσκηση 3

[ap27] *Για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα στήλης* $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ *ο πίνακας*

$$Q = I - \frac{2}{\vec{u}^T \vec{u}} \vec{u} \vec{u}^T$$

καλειται μετασχηματισμός του Householder.

(i) *Να αποδείξετε ότι ο πίνακας* Q *είναι συμμετρικός.*

(ii) *Να αποδείξετε ότι ο πίνακας* Q *είναι ορθογώνιος.*

Άσκηση 4

[ap57] *Εάν για τον τετραγωνικό πίνακα* A *ισχύει* $A^2 - 6A + 12I = 0$ *να αποδειχθεί ότι ο πίνακας*

$$(3I - A)^{2000}$$

είναι διαγώνιος.

Άσκηση 5

[ap58] *Εάν* A, B *είναι τετραγωνικοί πίνακες για τους οποίους ισχύει* $(A + B)^2 = A + B$ *και* $(A - B)^2 = A - B$ *να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι σχέσεις*

$$A^2 + B^2 = A \tag{1}$$

και

$$AB^2 = B^2 A. \tag{2}$$

Άσκηση 6

[ap52] *[≈ Δελής, Ιουν. 2020] Υποθέτοντας ότι οι πίνακες A, B και C είναι ομαλοί:*

(i) *Απλοποιείστε όσο είναι δυνατόν το αριστερό μέλος της*

$$\left(2AC^T\right)^{-1}\left(CA^T\right)^T BX = B^{-1}D^T$$

(ii) *Υπολογίστε τον πίνακα X αν* $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ *και* $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

(iii) *Αν* $\vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ *και* $\|\vec{u}\|_2 = \|\vec{w}\|_2 = 5$ *με* $< \vec{u}, \vec{w} >= 0.5$, *υπολογίστε την* $\|\vec{u} - \vec{w}\|_2$.

(iv) *Υπολογίστε τον πίνακα* M *αν ισχύει ότι*

$$(5M + 4I)^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^T$$

(v) *Απαντήστε, αιτιολογώντας, σωστό [Σ] ή λάθος [Λ] στη κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις :*

- *(α΄)* *Αν* $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *είναι ομαλοί, τότε το ίδιο ισχύει και για τον* AB.
- *(β΄)* *Αν* $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *είναι ομαλοί, τότε το ίδιο ισχύει και για τον* $A + B$.
- *(γ΄)* *Αν* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *ομαλός, τότε* $(kA)^{-1} = kA^{-1},\ k \in \mathbb{R}$.
- *(δ΄)* *Αν* $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *τότε,* $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.
- *(ε΄)* *Αν* $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *και για κάθε* $x \in \mathbb{R}^n$ *ισχύει* $(A - B)x = 0$ *τότε* $A = B$.
- *(στ΄)* *Αν για ένα πίνακα* $B \in \mathbb{R}^{m\times n},\ rank(B) = n$ *ο* B *, είναι ομαλός.*