Άσκηση 1

[ap8] *Έστω το γραμμικό σύστημα* $A\vec{x} = \vec{b}$ *με*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 4 & 6 & -3 \\ 9 & 7 & -5 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 26 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(i) *Εφαρμόζοντας την απλή απαλοιφή Gauss, βρείτε τον άνω τριγωνικό πίνακα* U *και το δεξί μέλος* $\vec{c}$*. Δηλαδή ξεκινώντας από τον επαυξημένο πίνακα* $[A \mid \vec{b}]$ *καταλήξτε στον* $[U \mid \vec{c}]$.

(ii) *Κάνοντας προς τα πίσω αντικατάσταση, στο σύστημα* $U\vec{x} = \vec{c}$*, βρείτε την λύση* $\vec{x}$.

(iii) *Επαληθεύστε την λύση (χρησιμοποιώντας Matlab ή Octave ή Freemat).*

Άσκηση 2

[ap10] *[Homework - θα ξαναγίνει σε επόμενο set] Έστω το γραμμικό σύστημα* $A\vec{x} = \vec{b}$ *με*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(i) *Εφαρμόζοντας την απλή απαλοιφή Gauss, βρείτε τον άνω τριγωνικό πίνακα* U *και το δεξί μέλος* $\vec{c}$*. Δηλαδή ξεκινώντας από τον επαυξημένο πίνακα* $[A \mid \vec{b}]$ *καταλήξτε στον* $[U \mid \vec{c}]$.

(ii) *Κάνοντας προς τα πίσω αντικατάσταση, στο σύστημα* $U\vec{x} = \vec{c}$*, επιλύστε το αρχικό σύστημα.*

(iii) *Αν το* b_3 *ήταν +1 πώς θα άλλαζε η λύση του γραμμικού συστήματος;*

Άσκηση 3

[ap29] *Έστω το γραμμικό σύστημα* $A\vec{x} = \vec{b}$ *με*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -12 & -3 & 8 \\ -4 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ -21 \\ -7 \\ -25 \end{bmatrix} \tag{1}$$

(i) *Εφαρμόζοντας την απλή απαλοιφή Gauss, βρείτε τον άνω τριγωνικό πίνακα* U *και το δεξί μέλος* $\vec{c}$*. Δηλαδή ξεκινώντας από τον επαυξημένο πίνακα* $[A \mid \vec{b}]$ *καταλήξτε στον* $[U \mid \vec{c}]$.

(ii) *Κάνοντας προς τα πίσω αντικατάσταση, στο σύστημα* $U\vec{x} = \vec{c}$*, βρείτε την λύση* $\vec{x}$.

Άσκηση 4

[ap16] *[Homework] Έστω το γραμμικό σύστημα* $A\vec{x} = \vec{b}$ *με*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 9 & -2 & 1 \\ 15 & 6 & 12 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 27 \\ 45 \end{bmatrix}$$

1. *Βρείτε τους πίνακες* L *και* U *που προκύπτουν από την παραγοντοποίηση* LU *(χωρίς οδήγηση) του πίνακα* A.
2. *Κάνοντας πολλαπλασιασμό πινάκων επαληθεύστε ότι* $A = LU$.

3. *Υπολογίστε την λύση του συστήματος $A\vec{x} = \vec{b}$ χρησιμοποιώντας την παραπάνω παραγοντοποίηση LU (λύνοντας 2 τριγωνικά συστήματα).*

4. *Επαληθεύστε την λύση (αντικαθιστώντας την στο αρχικό σύστημα).*

Άσκηση 5

[ap13] *Έστω το γραμμικό σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ με A, b*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -12 & -3 & 8 \\ -4 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ -21 \\ -7 \\ -25 \end{bmatrix}$$

[Το ίδιο σύστημα το κάναμε και με απαλοιφή Gauss].

1. *Βρείτε τους πίνακες L και U που προκύπτουν από την παραγοντοποίηση LU (χωρίς οδήγηση) του πίνακα A.*

2. *Κάνοντας πολλαπλασιασμό πινάκων επαληθεύστε ότι $A = LU$.*

3. *Υπολογίστε την λύση του συστήματος $A\vec{x} = \vec{b}$ χρησιμοποιώντας την παραπάνω παραγοντοποίηση LU (λύνοντας 2 τριγωνικά συστήματα).*

4. *Παρατηρείστε τις ομοιότητες με την προηγούμενη άσκηση (απλή απαλοιφή Gauss με απλή LU).*

Άσκηση 6

[ap17] *[Homework] [Για εξάσκηση] Έστω το γραμμικό σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ με*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 1 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & -7 \\ 1 & 4 & -8 & 3 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{b} = \begin{bmatrix} -9 \\ 9 \\ -30 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. *Βρείτε τους πίνακες L και U που προκύπτουν από την παραγοντοποίηση LU (χωρίς οδήγηση) του πίνακα A.*

2. *Κάνοντας πολλαπλασιασμό πινάκων επαληθεύστε ότι $A = LU$.*

3. *Υπολογίστε την λύση του συστήματος $A\vec{x} = \vec{b}$ χρησιμοποιώντας την παραπάνω παραγοντοποίηση LU (λύνοντας 2 τριγωνικά συστήματα).*

4. *Επαληθεύστε την λύση (αντικαθιστώντας την στο αρχικό σύστημα).*

Για απορίες: `https://www.eclass.tuc.gr/modules/document/file.php/MPD105/various/sifalakis_wres_grafeiou.pdf`