Άσκηση 1

[ap20] *Έστω ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & -1 & -4 \\ 4 & -2 & 1 & 6 & 1 \end{bmatrix},$$

(i) *Να γίνει η διάσπαση LU του πίνακα A με μερική οδήγηση. Δηλαδή βρείτε ένα κάτω τριγωνικό πίνακα L με μονάδες στην διαγώνιο, ένα τετραγωνικό μεταθετικό πίνακα P και ένα άνω τριγωνικό πίνακα U τέτοιους ώστε να ισχύει*

$$PA = LU.$$

(ii) *Να υπολογιστεί η τάξη του πίνακα A καθώς και οι διαστάσεις των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων του A. (Χώρου στηλών $R(A)$, χώρου γραμμών $R(A^{\mathrm{T}})$, μηδενόχωρου $N(A)$ και του αριστερού μηδενόχωρου $N(A^T)$.*

(iii) *Να βρεθούν βάσεις των $R(A)$, $R(A^{\mathrm{T}})$ και $N(A)$.*

(iv) *Να λυθεί το γραμμικό σύστημα*

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

χρησιμοποιώντας την παραπάνω ανάλυση LU για

$$b = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

(v) *Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ της λύσης του συστήματος και της βάσης του μηδενόχωρου.;*

Άσκηση 2

[ap21] *Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις εξετάστε αν τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα ή γραμμικά εξαρτημένα.*

i. $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_4} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ii. $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_4} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

iii. $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v_4} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_5} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 3

[ap59] *[Δελής Σεπ 22]*
Έστω τα διανύσματα

$$\vec{u}_1 = [1, 0, 1, 2]^T, \ \vec{u}_2 = [2, 1, 1, 0]^T, \ \vec{u}_3 = [2, 1, 0, 1]^T$$

και

$$\vec{x} = [1, 1, 2, -6]^T.$$

Αποδείξτε αν το διάνυσμα $\vec{x}$ μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ και $\vec{u}_3$ και αν ναι, ποιός είναι αυτός; Είναι τα $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ και $\vec{u}_3$ γραμμικά ανεξάρτητα;

Άσκηση 4

[ap60] *Έστω ο πίνακας*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & -1 & -4 \\ 4 & -2 & 1 & 6 & 1 \end{bmatrix},$$

[Ίδιος πίνακας με της άσκησης 1]
Να γίνει η διάσπαση LU του πίνακα A με μερική οδήγηση. Δηλαδή βρείτε ένα κάτω τριγωνικό πίνακα L με μονάδες στην διαγώνιο, ένα τετραγωνικό μεταθετικό πίνακα P και ένα άνω τριγωνικό πίνακα U τέτοιους ώστε να ισχύει

$$PA = LU.$$

Κατόπιν, κάνοντας χρήση και μόνο των P, L, U βρείτε για ποια $\vec{b}$ το σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ είναι συμβιβαστό.

Άσκηση 5

[ap61] *[Δελής Σεπ 21]*
Έστω σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Βρείτε για ποια $\vec{b}$ το σύστημα είναι συμβιβαστό.

Άσκηση 6

[ap62] *[Δελής Φεβ 22]*
Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{V} \in \mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{x_1} = [1, 1, 2]$, $\vec{x_2} = [2, 1, 3]$, $\vec{x_3} = [0, 1, 1]$ και $\vec{x_4} = [1, 0, 0]$. Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του $\mathbb{V}$. Να γραφεί το $\vec{w} = [1, -3, 4]$ σαν γραμμικος συνδυασμός της βάσης που υπολογίσατε.