

Άσκηση 1

[Δελής, Σεπ. 2019] Έστω πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \text{ και διανύσματα } \vec{x} = [-1 \ 1 \ -2 \ 3]^T \text{ και } \vec{y} = [2 \ 3 \ 1 \ -1.]$$

Υπολογίστε τις ποσότητες $\|A (A^T A)^{-1} A^T\|_1$ και $A^T x^T y A$.

* Αν δεν εχετε διδαχθεί τις νόρμες πινάκων υπολογίστε απλά τους πίνακες

Άσκηση 2

[Δελής, Φεβ. 2020] Για τούς πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

και τα διανύσματα $\vec{x} = [-1, 2, 3]^T$ και $\vec{y} = [-2, 2]$ υπολογίστε, όπου είναι δυνατόν, τις ποσότητες

- (i) $\|\vec{x} \vec{y} A\|_\infty$
- (ii) $(A \vec{x} \vec{y})^{-1}$
- (iii) $\|\vec{x}^T B A^T\|_1$

* Αν δεν εχετε διδαχθεί τις νόρμες πινάκων υπολογίστε απλά τους πίνακες

Άσκηση 3

Για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα στήλης $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ ο πίνακας

$$Q = I - \frac{2}{\vec{u}^T \vec{u}} \vec{u} \vec{u}^T$$

καλείται μετασχηματισμός του Householder.

- (i) Να αποδείξετε ότι ο πίνακας Q είναι συμμετρικός.
- (ii) Να αποδείξετε ότι ο πίνακας Q είναι ορθογώνιος.

Άσκηση 4

[≈ Δελής, Ιουν. 2020] Υποθέτοντας ότι οι πίνακες A, B και C είναι ομαλοί:

(i) Απλοποιήστε όσο είναι δυνατόν το αριστερό μέλος της

$$(2AC^T)^{-1} (CA^T)^T BX = B^{-1}D^T$$

(ii) Υπολογίστε τον πίνακα X αν $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ και $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

(iii) Αν $\vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ και $\|\vec{u}\|_2 = \|\vec{w}\|_2 = 5$ με $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = 0.5$, υπολογίστε την $\|\vec{u} - \vec{w}\|_2$.

(iv) Υπολογίστε τον πίνακα M αν ισχύει ότι

$$(5M + 4I)^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^T$$

(v) Απαντήστε, αιτιολογώντας, σωστό [Σ] ή λάθος [Λ] στη κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις :

- (α) Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι ομαλοί, τότε το ίδιο ισχύει και για τον AB .
- (β) Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι ομαλοί, τότε το ίδιο ισχύει και για τον $A + B$.
- (γ) Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ομαλός, τότε $(kA)^{-1} = kA^{-1}$, $k \in \mathbb{R}$.
- (δ) Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τότε, $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$.
- (ε) Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει $(A - B)x = 0$ τότε $A = B$.
- (στ) Αν για ένα πίνακα $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rank}(B) = n$ ο B , είναι ομαλός.

