

Άσκηση 1

Έστω ο συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 29 & 36 & 43 \\ 3 & 36 & 109 & 126 \\ 4 & 43 & 126 & 246 \end{bmatrix}$$

και το διάνυσμα στήλης

$$\vec{b} = [5, 45, 129, 250]^T$$

(α) Βρείτε τον κάτω τριγωνικό πίνακα L που προκύπτει από την παραγοντοποίηση Cholesky ($A = LL^T$).

(β) Υπολογίστε την λύση του συστήματος $A\vec{x} = \vec{b}$ χρησιμοποιώντας την παραπάνω παραγοντοποίηση LL^T (λύνοντας 2 τριγωνικά συστήματα).

Άσκηση 2

Να βρεθεί, αν υπάρχει, ο αντίστροφος του παρακάτω πίνακα A με την μέθοδο Gauss-Jordan.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Άσκηση 3

Έστω το γραμμικό σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ με

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 6 & 7 & 8 & -5 \\ -8 & -4 & -9 & 3 \\ 0 & 16 & -13 & -1 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{b} = \begin{bmatrix} 13 \\ 47 \\ -49 \\ 35 \end{bmatrix}$$

(i) Να γίνει η διάσπαση LU του πίνακα A με μερική οδήγηση. Δηλαδή βρείτε ένα κάτω τριγωνικό πίνακα L με μονάδες στην διαγώνιο, ένα τετραγωνικό μεταθετικό πίνακα P και ένα άνω τριγωνικό πίνακα U τέτοιους ώστε να ισχύει

$$PA = LU.$$

(ii) Κάνοντας πολλαπλασιασμό πινάκων επαληθεύστε ότι $PA = LU$.

(iii) Υπολογίστε την λύση του συστήματος $A\vec{x} = \vec{b}$ χρησιμοποιώντας την παραπάνω παραγοντοποίηση LU (λύνοντας 2 τριγωνικά συστήματα).

(iv) Επαληθεύστε την λύση (αντικαθιστώντας την στο αρχικό σύστημα).

Άσκηση 4

Να βρεθεί, αν υπάρχει, ο αντίστροφος του παρακάτω πίνακα A με την μέθοδο Gauss-Jordan.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

