

Άσκηση 1

Έστω ο πίνακας με

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- (i) Να γίνει η διάσπαση LU του πίνακα A με μερική οδήγηση. Δηλαδή βρείτε ένα κάτω τριγωνικό πίνακα L με μονάδες στην διαγώνιο, ένα τετραγωνικό μεταθετικό πίνακα P και ένα άνω τριγωνικό πίνακα U τέτοιους ώστε να ισχύει

$$PA = LU.$$

- (ii) Έστω

$$b = [0 \quad 12 \quad 2 \quad 0]^T.$$

Υπολογίστε την λύση του συστήματος $A\vec{x} = \vec{b}$ χρησιμοποιώντας την παραπάνω παραγοντοποίηση LU (λύνοντας 2 τριγωνικά συστήματα).

- (iii) Έστω

$$w = [\frac{3}{2} \quad \frac{5}{2} \quad 1 \quad 1]^T.$$

Υπολογίστε την λύση του συστήματος $A\vec{x} = \vec{w}$ χρησιμοποιώντας την παραπάνω παραγοντοποίηση LU (λύνοντας 2 τριγωνικά συστήματα).

Άσκηση 2

Έστω A ο (μή τετραγωνικός) πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 9 & 5 & 4 \\ -1 & -3 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 15 & 7 & 12 \end{bmatrix}.$$

- (i) Να γίνει η διάσπαση LU του πίνακα A με μερική οδήγηση. Δηλαδή βρείτε ένα κάτω τριγωνικό πίνακα L με μονάδες στην διαγώνιο, ένα τετραγωνικό μεταθετικό πίνακα P και ένα άνω τριγωνικό πίνακα U τέτοιους ώστε να ισχύει

$$PA = LU.$$

- (ii) Ποιοί είναι οι οδηγοί, ποιές είναι οι στήλες οδήγησης, ποιά είναι η τάξη του πίνακα A, ποιές είναι οι βασικές μεταβλητές και ποιές οι ελεύθερες μεταβλητές;

- (iii) Χρησιμοποιώντας τους πίνακες P, L και U βρείτε, αν υπάρχει, την λύση του γραμμικού συστήματος $A\vec{x} = \vec{b}$ όπου $\vec{b} = [1 \ 2 \ 3 \ 4]^T$ και γράψτε την στην μορφή

$$\vec{x}_{γενική} = \vec{x}_{ειδική} + \vec{x}_{ομογενούς}$$

- (iv) Χρησιμοποιώντας τους πίνακες P, L και U βρείτε, αν υπάρχει, την λύση του γραμμικού συστήματος $Ax = b$ όπου $b = [\frac{13}{10} \ 1 \ \frac{1}{2} \ \frac{14}{5}]^T$ και γράψτε την στην μορφή

$$\vec{x}_{γενική} = \vec{x}_{ειδική} + \vec{x}_{ομογενούς}$$

Άσκηση 3

Έστω το (υπερκαθορισμένο) γραμμικό σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ με

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & 6 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

- (i) Να γίνει η διάσπαση LU του πίνακα A με μερική οδήγηση. Δηλαδή βρείτε ένα κάτω τριγωνικό πίνακα L με μονάδες στην διαγώνιο, ένα τετραγωνικό μεταθετικό πίνακα P και ένα άνω τριγωνικό πίνακα U τέτοιους ώστε να ισχύει

$$PA = LU.$$

- (ii) Ποιοί είναι οι οδηγοί, ποιές είναι οι στήλες οδήγησης, ποιά είναι η τάξη του πίνακα A , ποιές είναι οι βασικές μεταβλητές και ποιές οι ελεύθερες μεταβλητές;
- (iii) Χρησιμοποιώντας τους πίνακες P , L και U βρείτε, αν υπάρχει, την λύση του γραμμικού συστήματος και γράψτε την στην μορφή

$$\vec{x}_{\text{γενική}} = \vec{x}_{\text{ειδική}} + \vec{x}_{\text{ομογενούς}}$$

- (iv) Αν στο δεξί μέλος ήταν $b_2 = 0$ πως θα επηρεαζόνταν η λύση του συστήματος;

