

Άσκηση 1

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & -1 & -4 \\ 4 & -2 & 1 & 6 & 1 \end{bmatrix},$$

(i) Να γίνει η διάσπαση LU του πίνακα A με μερική οδήγηση. Δηλαδή βρείτε ένα κάτω τριγωνικό πίνακα L με μονάδες στην διαγώνιο, ένα τετραγωνικό μεταθετικό πίνακα P και ένα άνω τριγωνικό πίνακα U τέτοιους ώστε να ισχύει

$$PA = LU.$$

(ii) Να υπολογιστεί η τάξη του πίνακα A καθώς και οι διαστάσεις των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων του A. (Χώρου στηλών $R(A)$, χώρου γραμμών $R(A^T)$, μηδενόχωρου $N(A)$ και του αριστερού μηδενόχωρου $N(A^T)$).

(iii) Να βρεθούν βάσεις των $R(A)$, $R(A^T)$ και $N(A)$.

(iv) Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

χρησιμοποιώντας την παραπάνω ανάλυση LU για

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T.$$

(v) Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ της λύσης του συστήματος και της βάσης του μηδενόχωρου;

Άσκηση 2

Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις εξετάστε αν τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα ή γραμμικά εξαρτημένα.

$$\text{i. } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}^T, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

$$\text{ii. } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}^T, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}^T, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}^T.$$

$$\text{iii. } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}^T, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}^T, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}^T, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 6 & 1 \end{pmatrix}^T, \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Άσκηση 3

[Δελής Σεπ 21 (ερώτημα)]

Έστω σύστημα $A\vec{x} = \vec{b}$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Βρείτε για ποια $\vec{b}$ το σύστημα είναι συμβιβαστό.

Άσκηση 4

[Δελής Φεβ 22]

Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{V} \in \mathbb{R}^3$ που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{x}_1 = [1, 1, 2]$, $\vec{x}_2 = [2, 1, 3]$, $\vec{x}_3 = [0, 1, 1]$ και $\vec{x}_4 = [1, 0, 0]$. Βρείτε μια βάση και τη διάσταση του $\mathbb{V}$. Να γραφεί το $\vec{w} = [1, -3, 4]$ σαν γραμμικός συνδυασμός της βάσης που υπολογίσατε.

