

Άσκηση 1

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (i) Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, $p_A(\lambda)$, του πίνακα A
- (ii) Βρείτε τις ιδιοτιμές και την ορίζουσα του πίνακα A . Επαληθεύστε ότι το άθροισμα των ιδιοτιμών ισούται με το ίχνος του A . Χωρίς περαιτέρω πράξεις μπορούμε να αποφανθούμε για το αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος;
- (iii) Για κάθε διακριτή ιδιοτιμή λ βρείτε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα (ή τα αντίστοιχα ιδιοδυσανύσματα).
- (iv) Εξετάστε αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος. Αν είναι βρείτε τους πίνακες που τον διαγωνοποιούν. (Βρείτε και τους τρεις πίνακες S , Λ , S^{-1})
- (v) Αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος, βρείτε τις ιδιοτιμές, και την ορίζουσα του A^{100} καθώς και τον ίδιο τον πίνακα A^{100} .

Άσκηση 2

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (i) Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, $p_A(\lambda)$, του πίνακα A
- (ii) Βρείτε τις ιδιοτιμές και την ορίζουσα του πίνακα A .
- (iii) Χωρίς περαιτέρω πράξεις μπορούμε να αποφανθούμε για το αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος ;
- (iv) Για κάθε διακριτή ιδιοτιμή λ βρείτε την διάσταση και μια βάση του $\mathcal{N}(A - \lambda I)$.
- (v) Για κάθε διακριτή ιδιοτιμή λ βρείτε m γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, όπου m η διάσταση του $\mathcal{N}(A - \lambda I)$. (Αν $m=1$ βρείτε ένα ιδιοδιάνυσμα.)
- (vi) Εξετάστε αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος. Αν είναι βρείτε τους πίνακες που τον διαγωνοποιούν.
- (vii) Χρησιμοποιώντας μόνο την πληροφορία των ιδιοτιμών του A (δηλαδή υποθέστε ότι γνωρίζετε μόνο τις ιδιοτιμές του πίνακα και όχι τον ίδιο τον πίνακα) βρείτε τις ιδιοτιμές και την ορίζουσα των A^T και A^{-1} καθώς και τις ιδιοτιμές του πίνακα $B = A - 3I$.

Άσκηση 3

Γνωρίζουμε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbf{R}^{10,10}$ έχει 91 μηδενικά 3 άσσους 2 δυάρια και 4 τέσσάρια. Υπολογίστε την ορίζουσα του.

Άσκηση 4

[Δελής Ιούνιος 2020] Ένας πίνακας $B \in \mathbf{R}^{2,2}$ έχει ορίζουσα 3 και ίχνος 2. Έχει ο B κάποια πραγματική ιδιοτιμή;

Άσκηση 5

[Δελής Ιούνιος 2020] Έστω πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -12 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

Υπολογίστε τον A^{100} με χρήση του Θεωρήματος Cayley-Hamilton.

