

Άσκηση 1

[ap20] Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & -1 & -4 \\ 4 & -2 & 1 & 6 & 1 \end{bmatrix},$$

(i) Να γίνει η διάσπαση LU του πίνακα A με μερική οδήγηση. Δηλαδή βρείτε ένα κάτω τριγωνικό πίνακα L με μονάδες στην διαγώνιο, ένα τετραγωνικό μεταθετικό πίνακα P και ένα άνω τριγωνικό πίνακα U τέτοιους ώστε να ισχύει

$$PA = LU.$$

(ii) Να υπολογιστεί η τάξη του πίνακα A καθώς και οι διαστάσεις των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων του A. (Χώρου στηλών $R(A)$, χώρου γραμμών $R(A^T)$, μηδενόχωρου $N(A)$ και του αριστερού μηδενόχωρου $N(A^T)$).

(iii) Να βρεθούν βάσεις των $R(A)$, $R(A^T)$ και $N(A)$.

(iv) Να λυθεί το γραμμικό σύστημα

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

χρησιμοποιώντας την παραπάνω ανάλυση LU για

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T.$$

(v) Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ της λύσης του συστήματος και της βάσης του μηδενόχωρου;

Άσκηση 2

[ap21] Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις εξετάστε αν τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα ή γραμμικά εξαρτημένα.

i. $\vec{v}_1 = (1 \ 0 \ 3 \ 0)^T$, $\vec{v}_2 = (1 \ 4 \ 0 \ 0)^T$, $\vec{v}_3 = (1 \ 5 \ 0 \ 0)^T$, $\vec{v}_4 = (6 \ 0 \ 0 \ 1)^T$.

ii. $\vec{v}_1 = (1 \ 0 \ 1 \ 0)^T$, $\vec{v}_2 = (2 \ 3 \ 5 \ 0)^T$, $\vec{v}_3 = (3 \ 3 \ 6 \ 0)^T$, $\vec{v}_4 = (4 \ 4 \ 8 \ 4)^T$.

iii. $\vec{v}_1 = (1 \ 6 \ 9 \ 4)^T$, $\vec{v}_2 = (2 \ 7 \ 8 \ 3)^T$, $\vec{v}_3 = (3 \ 8 \ 7 \ 2)^T$, $\vec{v}_4 = (4 \ 9 \ 6 \ 1)^T$, $\vec{v}_5 = (5 \ 0 \ 5 \ 0)^T$.

Άσκηση 3

[ap59] [Δελής Σεπ 22]

Έστω τα διανύσματα

$$\vec{u}_1 = [1, 0, 1, 2]^T, \vec{u}_2 = [2, 1, 1, 0]^T, \vec{u}_3 = [2, 1, 0, 1]^T$$

και

$$\vec{x} = [1, 1, 2, -4]^T.$$

Αποδείξτε αν το διάνυσμα $\vec{x}$ μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ και $\vec{u}_3$ και αν ναι, ποιός είναι αυτός; Είναι τα $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ και $\vec{u}_3$ γραμμικά ανεξάρτητα;

Άσκηση 4

[ap44] Απαντήστε τις παρακάτω ερωτήσεις.

- i. Έστω διάνυσμα $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$. Αυτό μόνο του είναι γραμμικώς ανεξάρτητο ή γραμμικώς εξαρτημένο;
- ii. Έστω το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$. Αυτό μόνο του είναι γραμμικώς ανεξάρτητο ή γραμμικώς εξαρτημένο;
- iii. Αν ένα από τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N$ είναι το μηδενικό τότε τα παραπάνω διανύσματα είναι γρ. εξαρτημένα ή γρ. ανεξάρτητα;
- iv. Αν σε ένα πλήθος γραμμικώς εξαρτημένων διανυσμάτων βάλουμε και άλλα διανύσματα, τότε όλα μαζί θα είναι και πάλι γραμμικώς εξαρτημένα;
- v. Αν από ένα πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων βγάλουμε κάποια από αυτά τότε όσα μένουν είναι και πάλι γραμμικώς ανεξάρτητα;
- vi. Αν τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι γραμμικά εξαρτημένα τότε κάθε ένα από αυτά μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων;
- vii. Αν τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε κανένα από αυτά δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων;

