Έστω το ολοκλήρωμα

$$\int_{-12}^{12} \cos(6+\phi)d\phi.$$

- α) Χρησιμοποιώντας τον (απλό) κανόνα του Simpson 1/3 υπολογίστε το ολοκλήρωμα. Η τιμή του είναι: 21.8447
- β) Χρησιμοποιώντας τον σύνθετο κανόνα του Simpson 1/3, με χρήση 5 κόμβων, υπολογίστε το ολοκλήρωμα. Η τιμή του είναι: 21.8325
- γ) Χρησιμοποιώντας τον (απλό) κανόνα του Simpson 3/8 υπολογίστε το ολοκλήρωμα. Η τιμή του είναι: -6.4355
- δ) Χρησιμοποιώντας τον σύνθετο κανόνα του Simpson 3/8, με χρήση 7 κόμβων, υπολογίστε το ολοκλήρωμα. Η τιμή του είναι: -1.59458
- ε) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας τον απλό κανόνα του τραπεζίου και τον σύνθετο 9 κόμβων. Ο κανόνας που προσεγγίζει καλύτερα το ολοκλήρωμα είναι ο: Σύνθετος Simpson 3/8

α)

$$I_\alpha = \frac{b-\alpha}{2}\left[\frac{1}{3}f(\alpha) + \frac{4}{3}f\left(\frac{\alpha+b}{2}\right) + \frac{1}{3}f(b)\right]$$

$$= \frac{12+12}{2}\left[\frac{1}{3}f(-12) + \frac{4}{3}f\left(\frac{-12+12}{2}\right) + \frac{1}{3}f(12)\right]$$

$$= 12\left[\frac{1}{3}f(-12) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(12)\right]$$

$$= 12\left[\frac{1}{3}\cos(6-12) + \frac{4}{3}\cos(6) + \frac{1}{3}\cos(6+12)\right]$$

άρτια συνάρτηση

$$= 12\left(\frac{1}{3}\cos(-6) + \frac{4}{3}\cos(6) + \frac{1}{3}\cos(18)\right] = 12\left[\frac{5}{3}\cos(-6) + \frac{1}{3}\cos(18)\right]$$

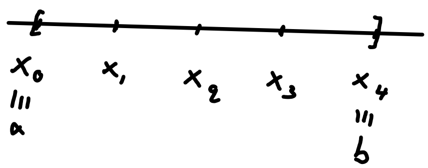
$$= \boxed{21.8447}$$

```
>> 12*(5/3*cos(-6)+1/3*cos(18))
ans =
    21.8447
```

Εννοείται ότι το όρισμα της cos είναι σε ακτίνια. Προσοχή αν χρησιμοποιήσουμε κομπιουτεράκι, θα πρέπει να του έχουμε ορίσει ότι δουλεύουμε με ακτίνια (rad)

$$\frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)\cdots+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

β)



5 κόμβοι $\Rightarrow n=4$ υποδιαστήματα $\Rightarrow h = \frac{b-\alpha}{n}$

$\Rightarrow h = \frac{12-(-12)}{4} = 6 \Rightarrow$

$x_0 = -12 \equiv \alpha$

$x_1 = -6$

$x_2 = 0$

$x_3 = 6$

$x_4 = 12 \equiv b$

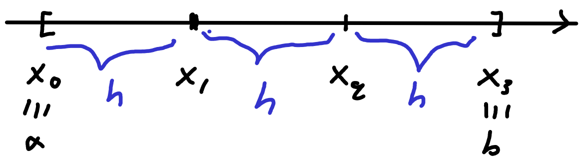
$$I = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right]$$

$$I = \frac{6}{3}\left[f(-12) + 4f(-6) + 2f(0) + 4f(6) + f(12)\right] = 2\left[\cos(-6) + 4\cos(0) + 2\cos(6) +\right.$$

$$\left. + 4\cos(12) + \cos(18)\right] = 2\left[3\cdot\cos(-6) + 4\cdot 1 + 4\cos(12) + \cos(18)\right] = \boxed{21.832}$$

γ)

$$Q_{3/8}(f) = \frac{3h}{8}\Big[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\Big]$$



$$h = \frac{b-\alpha}{3} = \frac{12-(-12)}{3} = 8$$

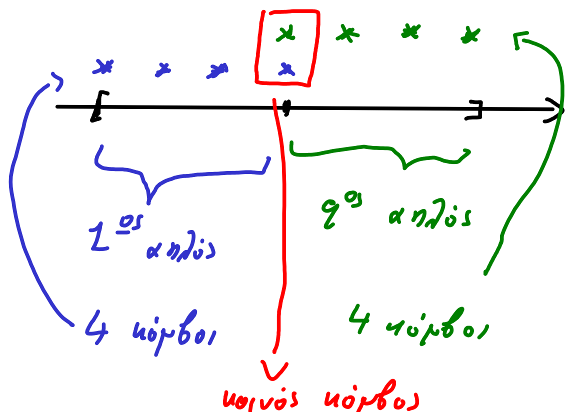
$$x_0 = -12,\quad x_1 = -4,\quad x_2 = 4,\quad x_3 = 12$$

$$I = \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right] =$$

$$= \frac{3\cdot 8}{8}\left[f(-12) + 3f(-4) + 3f(4) + f(12)\right] =$$

$$= 3\left[\cos(-6) + 3\cdot\cos(2) + 3\cos(10) + \cos(18)\right] = \boxed{-6.4355}$$

δ)



Ο απλός κανόνας του Simpson $\frac{3}{8}$ χρειάζεται 4 κόμβους. Άρα ο σύνθετος με 7 κόμβους "αποτελείται" από δυο απλούς. 4 κόμβοι ο $1^{ος}$ απλός + 4 κόμβους ο $2^{ος}$ απλός = 8 κόμβους αλλά ο ένας είναι κοινός και στους δυο απλούς κανόνες $\Rightarrow$ σύνολο 7 κόμβοι.

$$h = \frac{12-(-12)}{6} = 4$$

$$I_{σύνθετος} = I_{απλός} \text{ στο } [-12, 0] + I_{απλός} \text{ στο } [0, 12]$$

$$= \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right] + \frac{3h}{8}\left[f(x_3) + 3f(x_4) + 3f(x_5) + f(x_6)\right] =$$

$$= \frac{3}{8}\cdot 4\left[f(-12) + 3f(-8) + 3f(-4) + f(0)\right] + \frac{3}{8}\cdot 4\left[f(0) + f(4) + f(8) + f(12)\right] =$$

$$\approx \boxed{-1.5946}$$

```
>> f = @(x) cos(6+x);
>> 3/2*(f(-12)+3*f(-8)+3*f(-4)+f(0)) + 3/2*(f(0)+3*f(4)+3*f(8)+f(12))
ans =
   -1.5946
```

ε) Απλός Τραπεζίου: $I = \frac{b-\alpha}{2}\left[f(\alpha) + f(b)\right] = \frac{12-(-12)}{2}\left[f(-12) + f(12)\right] = 19.4458$

Σύνθετος Τραπεζίου: $I = h\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_8) + \frac{1}{2}f(x_9)\right]$, $h = \frac{b-a}{8} = 3$

$$I = 3\left[\frac{1}{2}f(-12) + f(-9) + f(-6) + f(-3) + f(0) + f(3) + f(6) + f(9) + \frac{1}{2}f(12)\right]$$

9 κόμβοι $\Rightarrow$ $n=8$ υποδιαστήματα

$$I = -0.1096$$

Για να αποφασίσω ποιος κανόνας προσεγγίζει καλύτερα το ολοκλήρωμα θα πρέπει να βρω την ακριβή του τιμή.

$$I_{real} = \int_{-12}^{12} \cos(6+\varphi)\,d\varphi = \Big[\sin(6+\varphi)\Big]_{-12}^{12} = -1.0304$$

Πιο κοντά στην πραγματική τιμή βρίσκεται η προσέγγιση που μας δίνει

ο $\boxed{\text{σύνθετος κανόνας Simpson } \frac{3}{8}}$