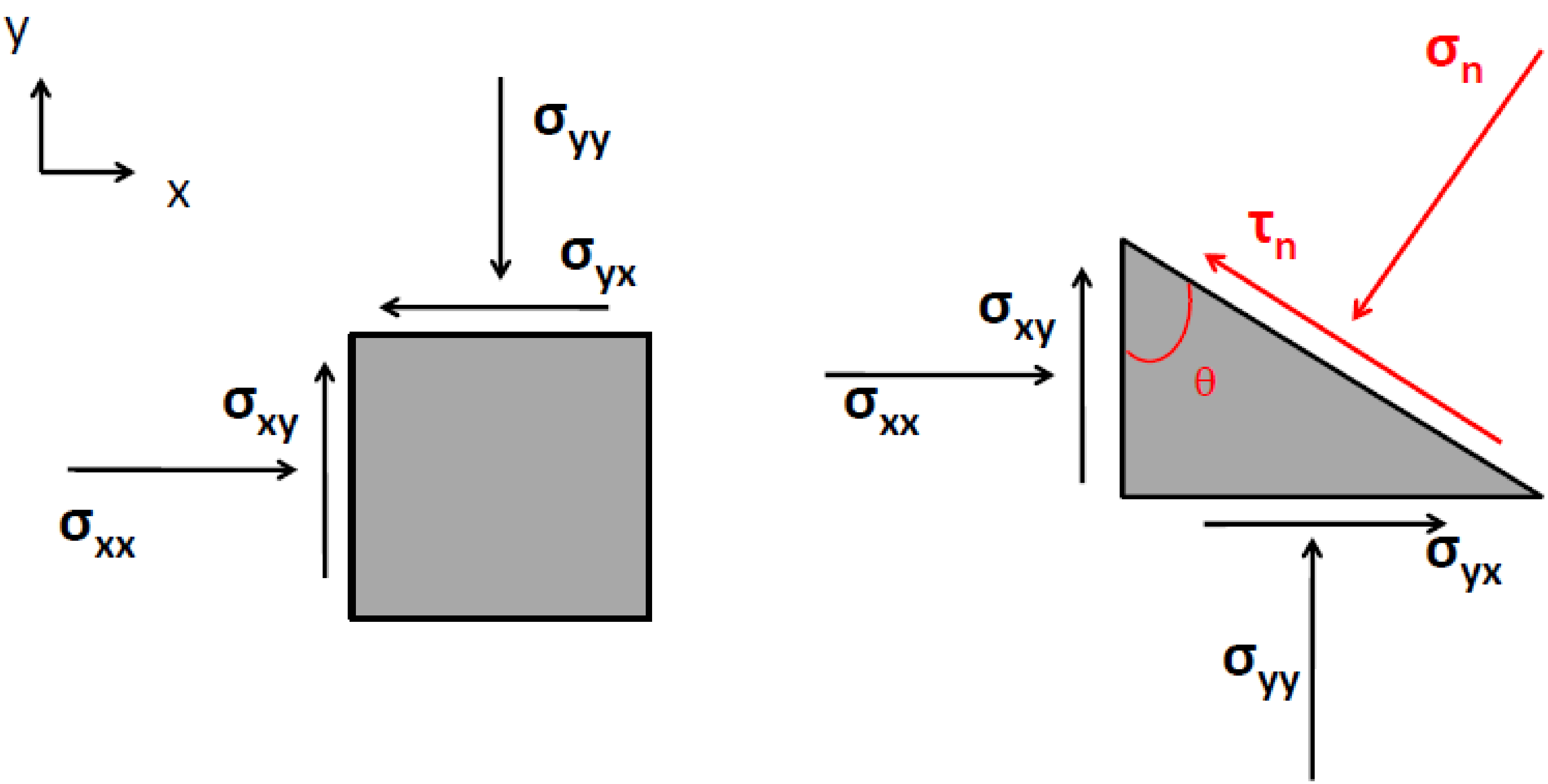
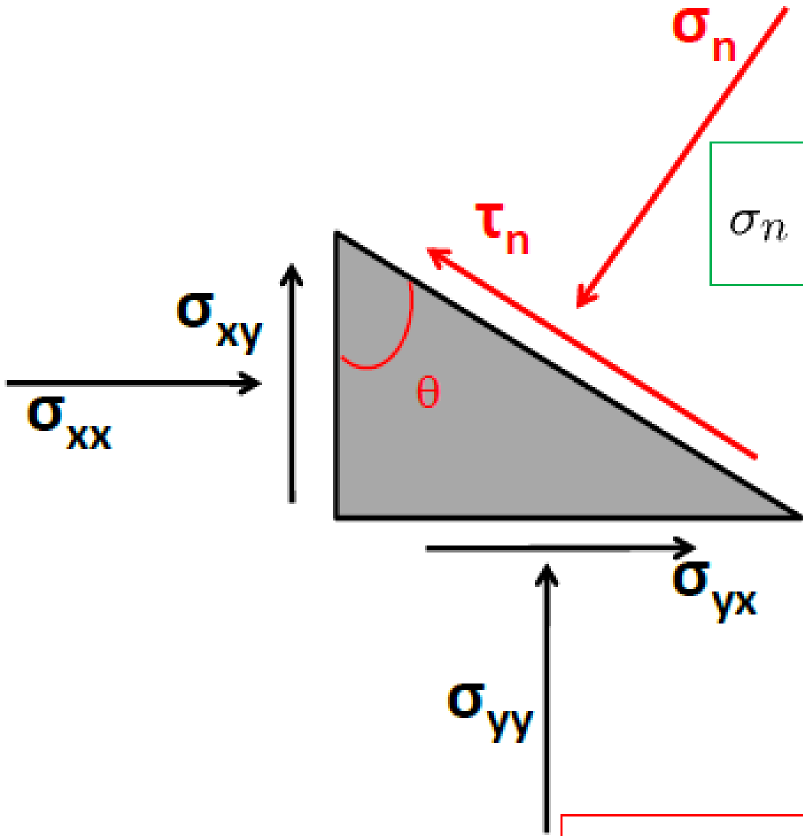
Επίπεδη ένταση – εύρεση των κυρίων αξόνων



Θλιπτικές τάσεις: θετικές
Εφελκυστικές τάσεις: αρνητικές

Επίπεδη ένταση – εύρεση των κυρίων αξόνων



$$\sigma_n = \sigma_{xx}\cos^2\theta + \sigma_{yy}\sin^2\theta + \sigma_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_n = \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\sin 2\theta - \sigma_{xy}\cos 2\theta$$

Για τις κύριες τάσεις επειδή μηδενίζονται οι διατμητικές τάσεις, άρα:

$$\tau_n = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\sin 2\theta - \sigma_{xy}\cos 2\theta = 0 \Rightarrow$$

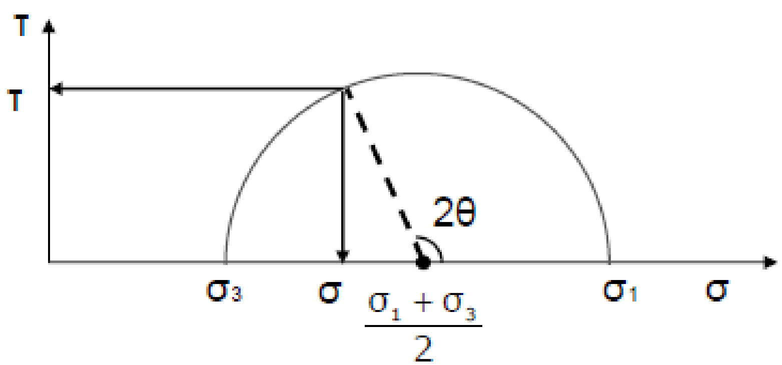
$$\tan 2\theta = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}$$

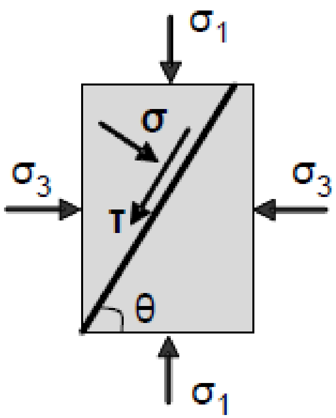
Κύκλος του Mohr (θεωρία Mohr-Coulomb)

Ο κύκλος του Mohr αποτελεί μια εύχρηστη μέθοδο για την αντιμετώπιση θεμάτων εδαφικής αντοχής σε διάτμηση.

Έστω σ_1 και σ_3 η μέγιστη και ελάχιστη κύρια τάση (σχήμα)

Χαράσσεται κύκλος με κέντρο $(\sigma_1+\sigma_3)/2$ και διάμετρο $(\sigma_1-\sigma_3)$ σε διάγραμμα τ-σ (διατμητικών-ορθών τάσεων)

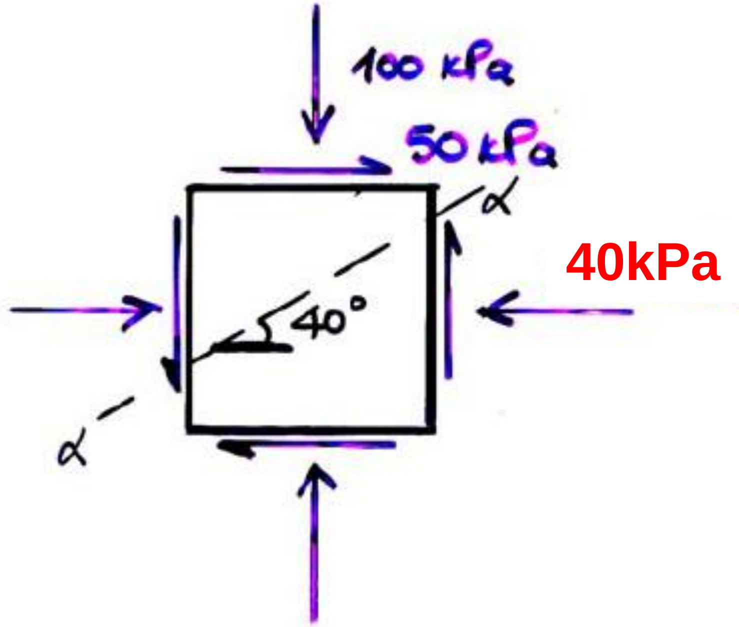




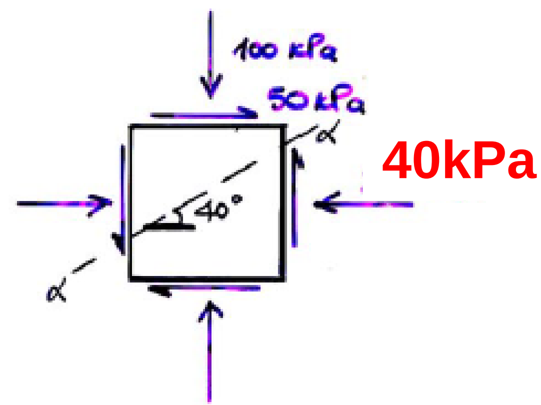
Αν θέλουμε να βρούμε την σ και τ σε επίπεδο που σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντιο, από το κέντρο του κύκλου φέρουμε ευθεία με γωνία 2θ με τον οριζόντιο άξονα. Το σημείο τομής με τον κύκλο δίνει τις σ και τ.

$$\sigma = \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\cos 2\theta$$

$$\tau = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\sin 2\theta$$



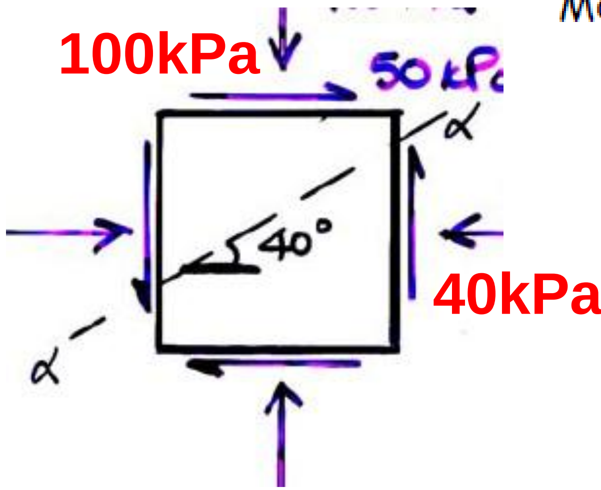
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1



1. Να σχεδιασθεί ο κύκλος Mohr
2. Να υπολογισθούν οι κύριες τάσεις και τα επίπεδα εφαρμογής τους
3. Να υπολογισθούν οι τάσεις στο επίπεδο α-α

Να σχεδιασθεί ο κύκλος Mohr

Να υπολογισθούν οι τάσεις στο επίπεδο α-α



σ_{xx} = 100 kPa , σ_{yy}=40 kPa & σ_{xy}=50 kPa

$$\boxed{\tan 2\theta = \frac{2\,\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}}$$

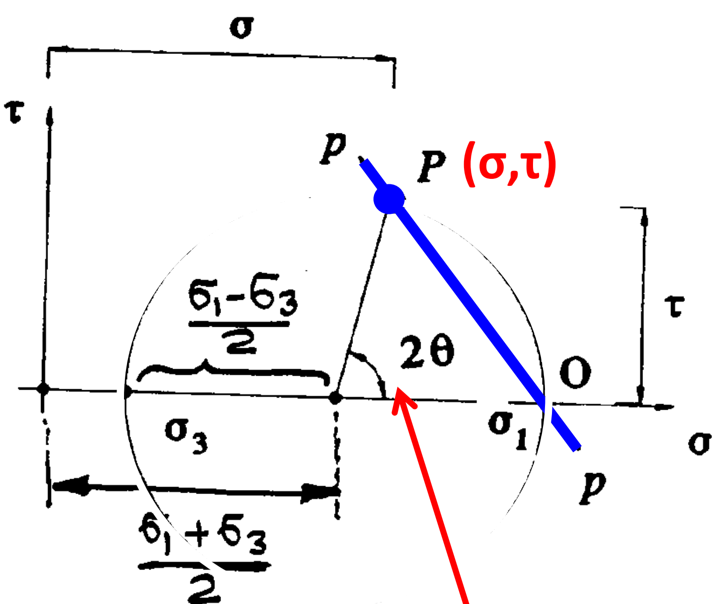
= 1.67 , άρα :

θ_1=29.52° και

θ_2=119.52°

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\cos 2\theta + \sigma_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\sin 2\theta - \sigma_{xy}\cos 2\theta$$



σ_1 = 128.31 kPa και σ_3 = 11.67 kPa

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\cos 2\theta$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\sin 2\theta$$

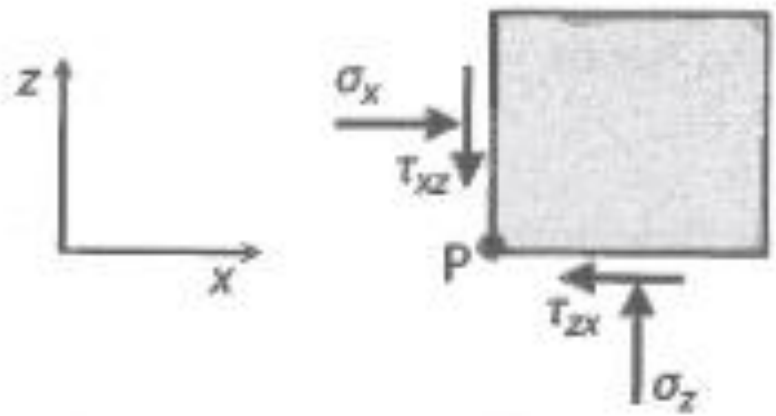
θ=40 : σ = 80.12kPa και τ = 57.43kPa

Άσκηση κύκλου Mohr

Σε ένα σημείο P του εδάφους ασκούνται οι ολικές τάσεις $\sigma_x = 100$ kPa, $\sigma_z = 200$ kPa και $\tau_{xz} = \tau_{zx} = -50$ kPa. Η φορά των τάσεων φαίνεται στο σχήμα. Ζητούνται :

α) Να σχεδιαστεί ο κύκλος Mohr των ολικών τάσεων και να σημειωθεί ο πόλος (Π) του κύκλου.

β) Να υπολογιστούν οι κύριες ολικές τάσεις, οι κλίσεις των κύριων επιπέδων και οι τάσεις που ασκούνται σε ένα επίπεδο που διέρχεται από το σημείο P με κλίση -30°.



ΛΥΣΗ

α) Για τη σχεδίαση του κύκλου Mohr, οι αριστερόστροφες διατμητικές τάσεις λαμβάνονται ως θετικές. Έτσι, στο διάγραμμα $\sigma-\tau$ του επόμενου σχήματος, το σημείο Α ($\sigma_x = 100$ kPa, $\tau_{xz} = 50$ kPa) αντιστοιχεί στις τάσεις που ασκούνται στο κατακόρυφο επίπεδο, ενώ το σημείο Β ($\sigma_z = 200$ kPa, $\tau_{zx} = -50$ kPa) στις τάσεις που ασκούνται στο οριζόντιο επίπεδο. Ο κύκλος Mohr διέρχεται τα σημεία Α και Β. Το κέντρο του Κ βρίσκεται σε απόσταση s από την αρχή των αξόνων Ο:

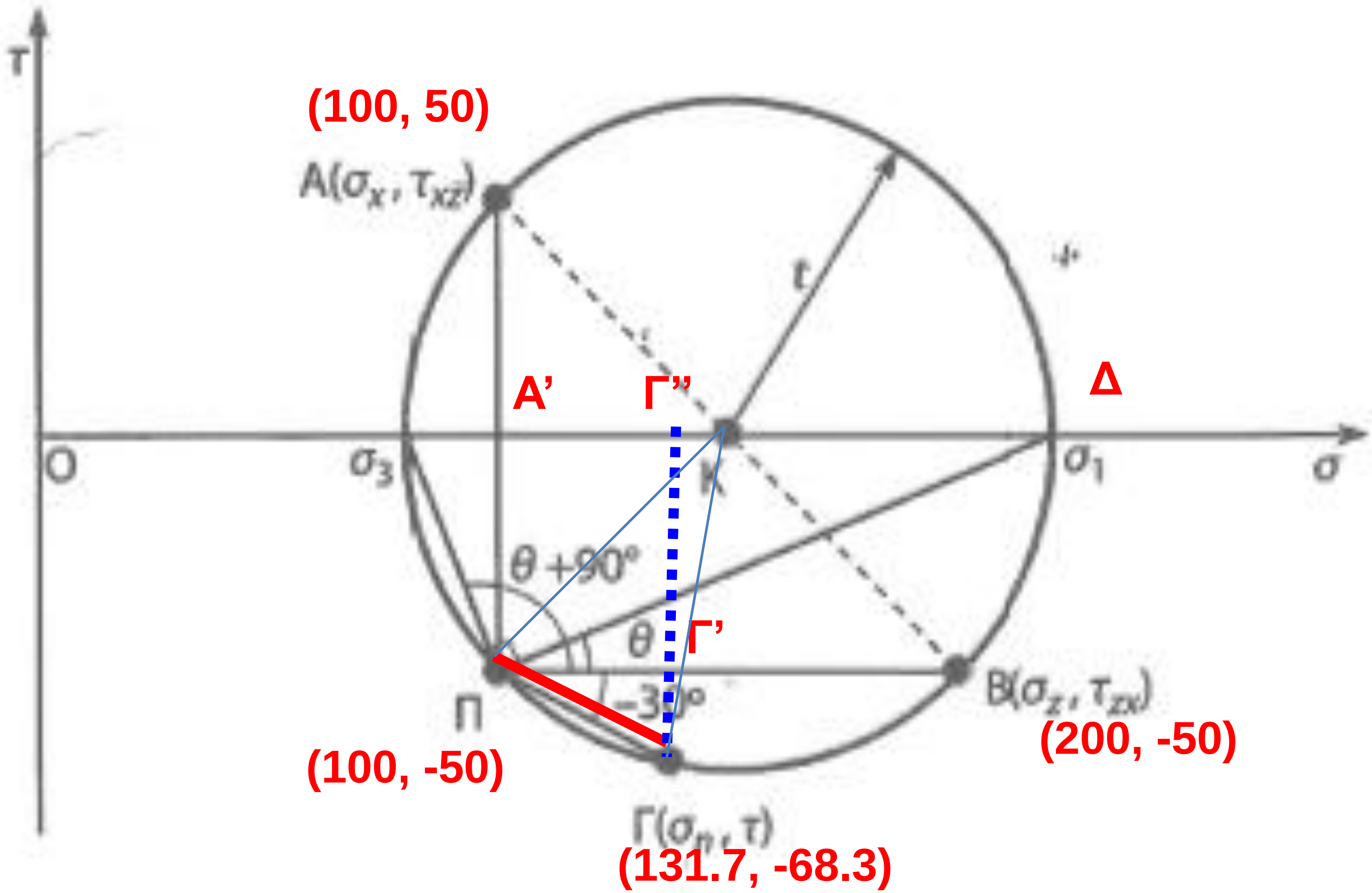
$$s = \mathrm{OK} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} = 150 \text{ kPa}$$

Η ακτίνα t του κύκλου είναι ίση προς:

$$t = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = 70.7 \text{ kPa}$$

Ο πόλος Π προκύπτει από την τομή του κύκλου και της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α και είναι παράλληλη προς το επίπεδο των τάσεων (σ_x, τ_{xz}), δηλαδή το κατακόρυφο επίπεδο. Το ίδιο σημείο προκύπτει από την τομή του κύκλου με την ευθεία που διέρχεται από το σημείο Β και είναι παράλληλη προς το επίπεδο των τάσεων (σ_z, τ_{zx}), δηλαδή το οριζόντιο επίπεδο.

β) Τα ζητούμενα μεγέθη υπολογίζονται γεωμετρικά με τη βοήθεια του σχήματος.



Κύριες ολικές τάσεις:

$$\sigma_1 = 150 + 70.7 = 220.7 \text{ kPa}$$

$$\sigma_3 = 150 - 70.7 = 79.3 \text{ kPa}$$

Κλίσεις των κύριων επιπέδων:

Τρίγωνο Α'ΔΠ

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{50}{220.7 - 100}\right) = 22.5^\circ \qquad \text{για τη } \sigma_1$$

$$\theta + 90^\circ = 112.5^\circ \qquad \text{για τη } \sigma_3$$

Τάσεις στο επίπεδο με κλίση -30°:

ΠΓ=2*t*cos(2θ+α)

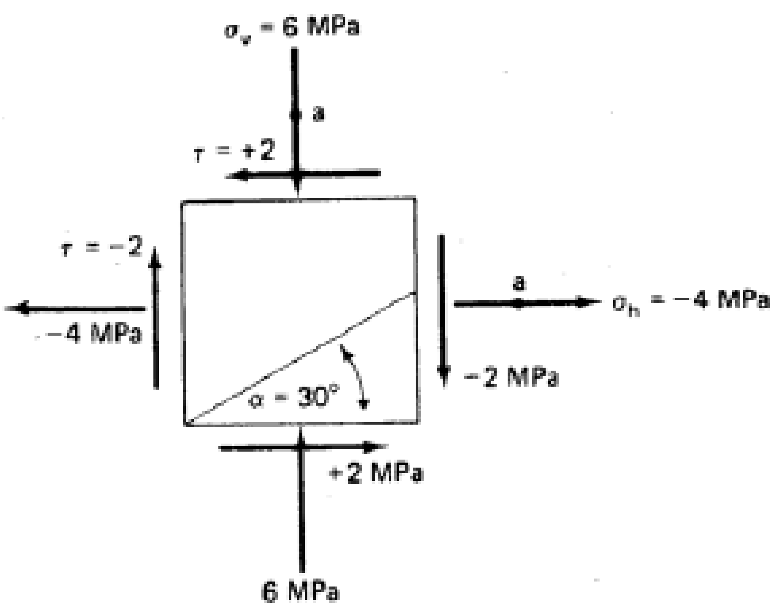
$$\Pi\Gamma = 2 \times 70.7 \times \cos\left(2 \times 22.5^\circ + 30^\circ\right) = 36.6 \text{ kPa}$$

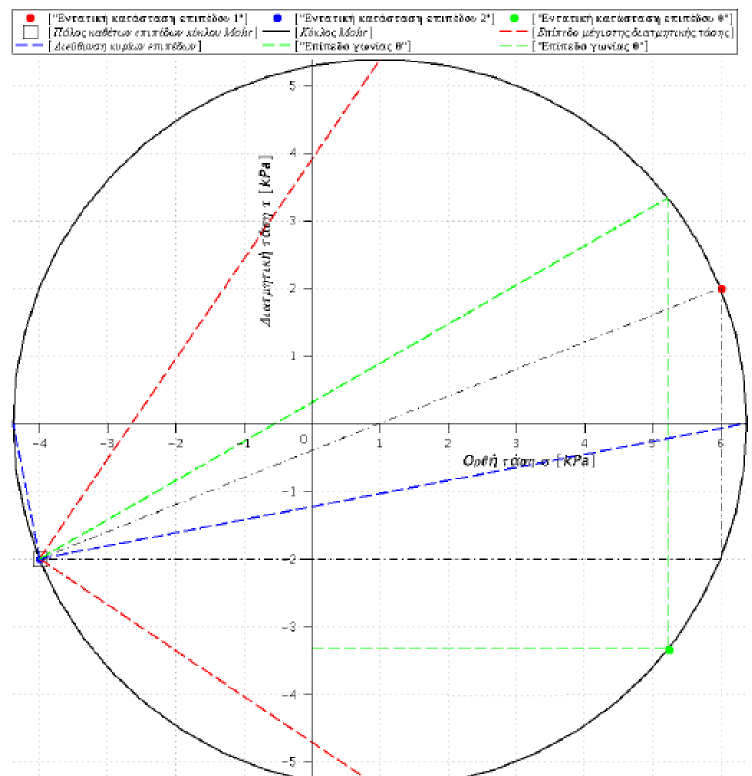
Τρίγωνο ΓΠΓ'

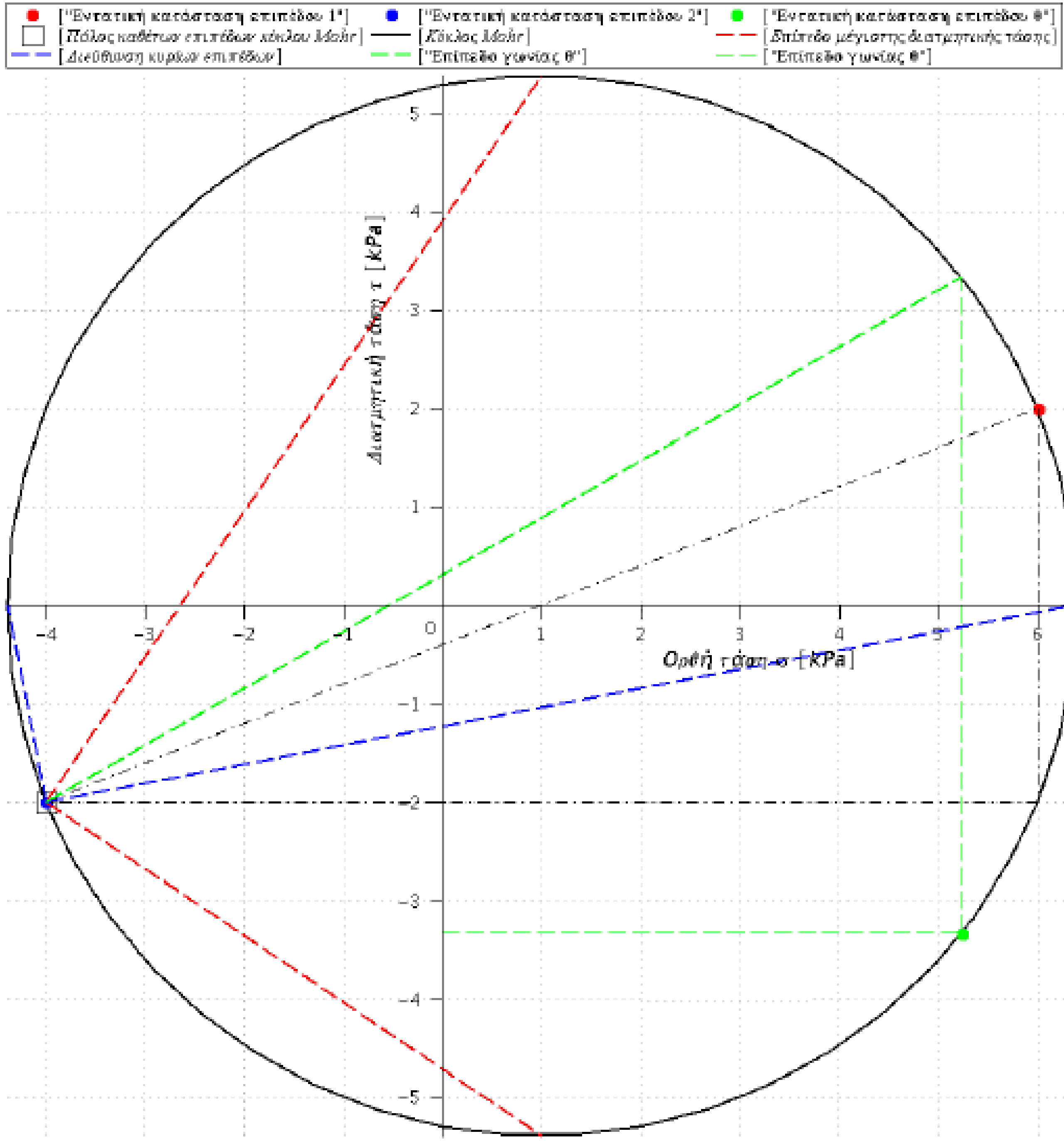
$$\sigma_n = 100 + 36.6 \times \cos 30^\circ = 131.7 \text{ kPa}$$

$$\tau = -50 - 36.6 \times \sin 30^\circ = -68.3 \text{ kPa}$$

Ο Πόλος των Καθέτων του κύκλου του Mohr βρίσκεται ως εξής: Έστω σημείο επί του κύκλου με εντατική κατάσταση (σ, τ). Από το σημείο αυτό φέρουμε ευθεία κάθετη στον άξονα των τετμημένων μέχρι να ξανατμήσει τον κύκλο, ή αλλιώς βρίσκουμε το συμμετρικό του σημείο ως προς τον άξονα των ορθών τάσεων (σ). Από το σημείο αυτό φέρουμε ευθεία παράλληλη προς το κάθετο διάνυσμα του επιπέδου στο οποίο δρα η ορθή και διατμητική τάση (σ, τ). Στο σημείο που ξανατέμνει το κύκλο του Mohr η ευθεία αυτή ορίζεται ο Πόλος των Καθέτων των επιπέδων. Συνεπώς, αν φέρουμε τώρα ευθεία η οποία να διέρχεται από τον Πόλο των Καθέτων των επιπέδων και η οποία να είναι παράλληλη προς το κάθετο διάνυσμα ενός επιπέδου, τότε το συμμετρικό σημείο ως προς τον άξονα των ορθών τάσεων, στο οποίο τέμνει η ευθεία αυτή τον κύκλο του Mohr, είναι η εντατική κατάσταση του επιπέδου αυτού. ι






["Εντατική κατάσταση επιπέδου 1"]
["Εντατική κατάσταση επιπέδου 2"]
["Εντατική κατάσταση επιπέδου θ"]
[Πόλος καθέτων επιπέδων κύκλου Mohr]
[Κύκλος Mohr]
[Επίπεδο μέγιστης διατμητικής τάσης]
[Διεύθυνση κυρίων επιπέδων]
["Επίπεδο γωνίας θ"]
["Επίπεδο γωνίας θ"]
Διατμητική τάση τ [kPa]
Ορθή τάση σ [kPa]

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\cos 2\theta + \sigma_{xy}\sin 2\theta$$
$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\sin 2\theta - \sigma_{xy}\cos 2\theta$$

Λύση: Βάσει των ανωτέρω, για $\theta = \alpha = 30°$

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \dfrac{6+(-4)}{2} + \dfrac{6-(-4)}{2}\cos 60° + 2\sin 60° = 5.23kPa \\ \tau_\theta = -\dfrac{6-(-4)}{2}\sin 60° + (-2)\cos 60° = -3.33kPa \end{cases}$$

Οι κύριες τάσεις υπολογίζονται από τις σχέσεις,

$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{\sigma_{11}+\sigma_{33}}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_{11}-\sigma_{33}}{2}\right)^2 + {\sigma_{13}}^2} = 6.39kPa \\ \sigma_3 = \dfrac{\sigma_{11}+\sigma_{33}}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_{11}-\sigma_{33}}{2}\right)^2 + {\sigma_{13}}^2} = -4.39kPa \end{cases}$$

(Εναλλακτικός τρόπος με βάση την κλασσική μηχανική)

και οι διευθύνσεις τους είναι,

$$\tan 2\varphi = \frac{2\sigma_{13}}{\sigma_{11} - \sigma_{33}} \Rightarrow \varphi_1 = 10.9°, \varphi_2 = 100.9°$$

Τα επίπεδα με την μέγιστη διατμητική τάση σχηματίζουν γωνία θ ίση με,

$$\tan 2\theta = \frac{\tau_{max} - \tau_p}{\sigma_m - \sigma_p} \Rightarrow \theta_1 = 55.90°, \theta_2 = -34.10°$$

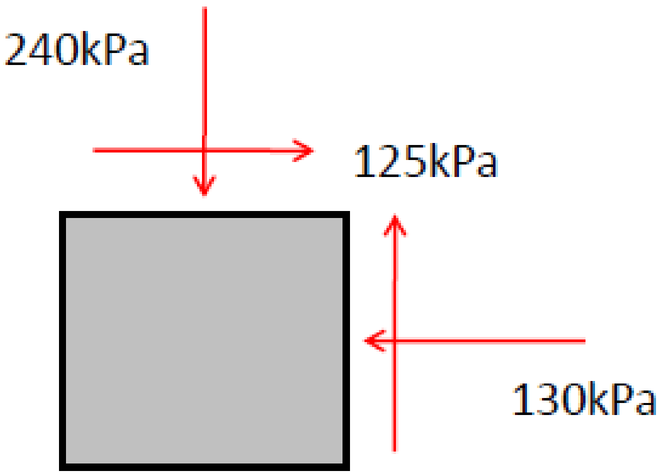
όπου η μέγιστη διατμητική τάση ισούται με,

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 5.39kPa$$

και (σ_p, τ_p) είναι οι συντεταγμένες του Πόλου των καθέτων των επιπέδων στον κύκλο του Mohr. Με σ_m συμβολίζεται η συντεταγμένη του κέντρου του κύκλου του Mohr,

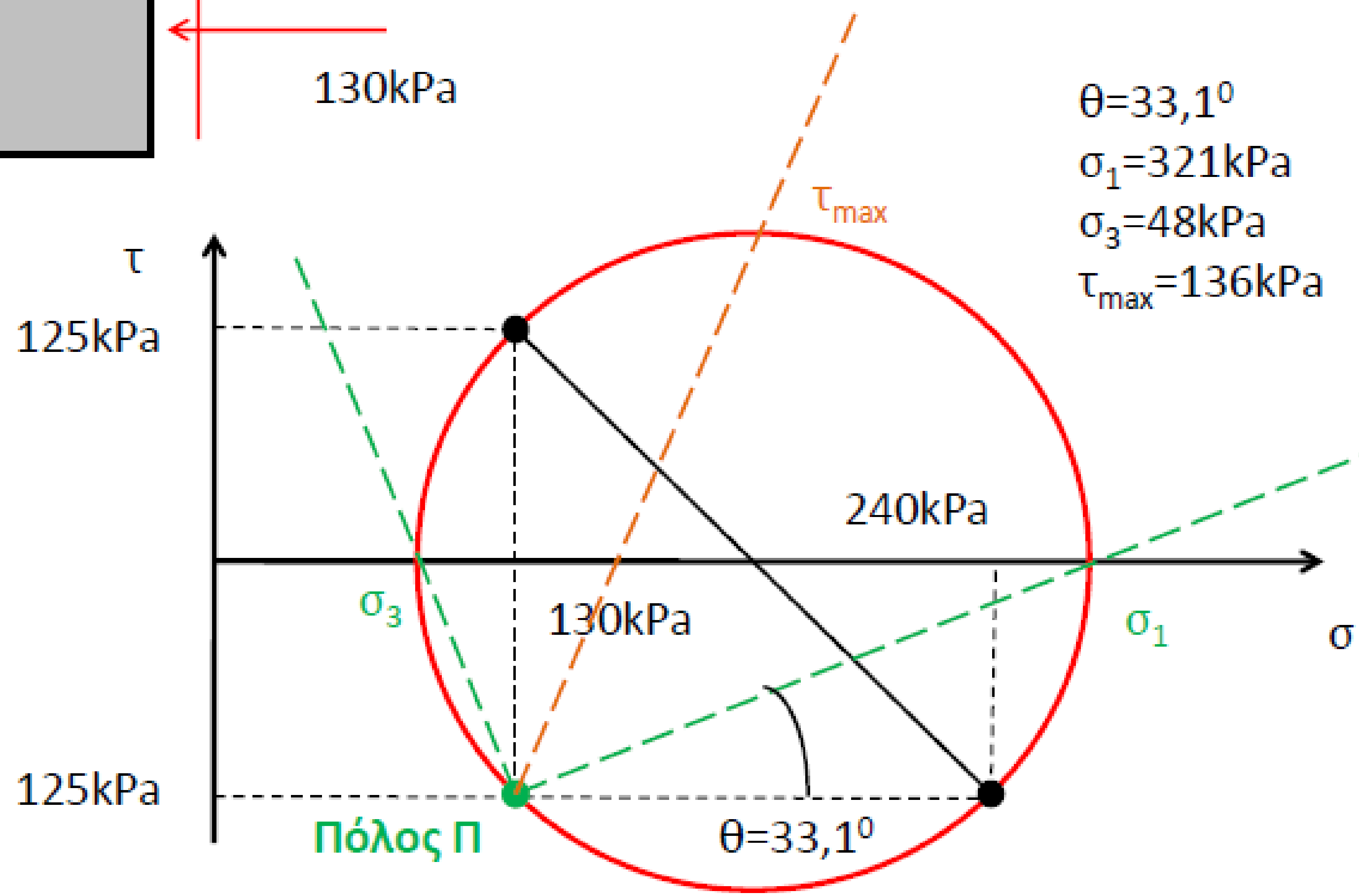
$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

Αριθμητική εφαρμογή επίπεδης έντασης



Δίνονται: σ_{xx}, σ_{yy}, τ

Ζητούνται: σ_1, σ_2, τ_{max}



$\theta=33,1^0$

$\sigma_1=321kPa$

$\sigma_3=48kPa$

$\tau_{max}=136kPa$